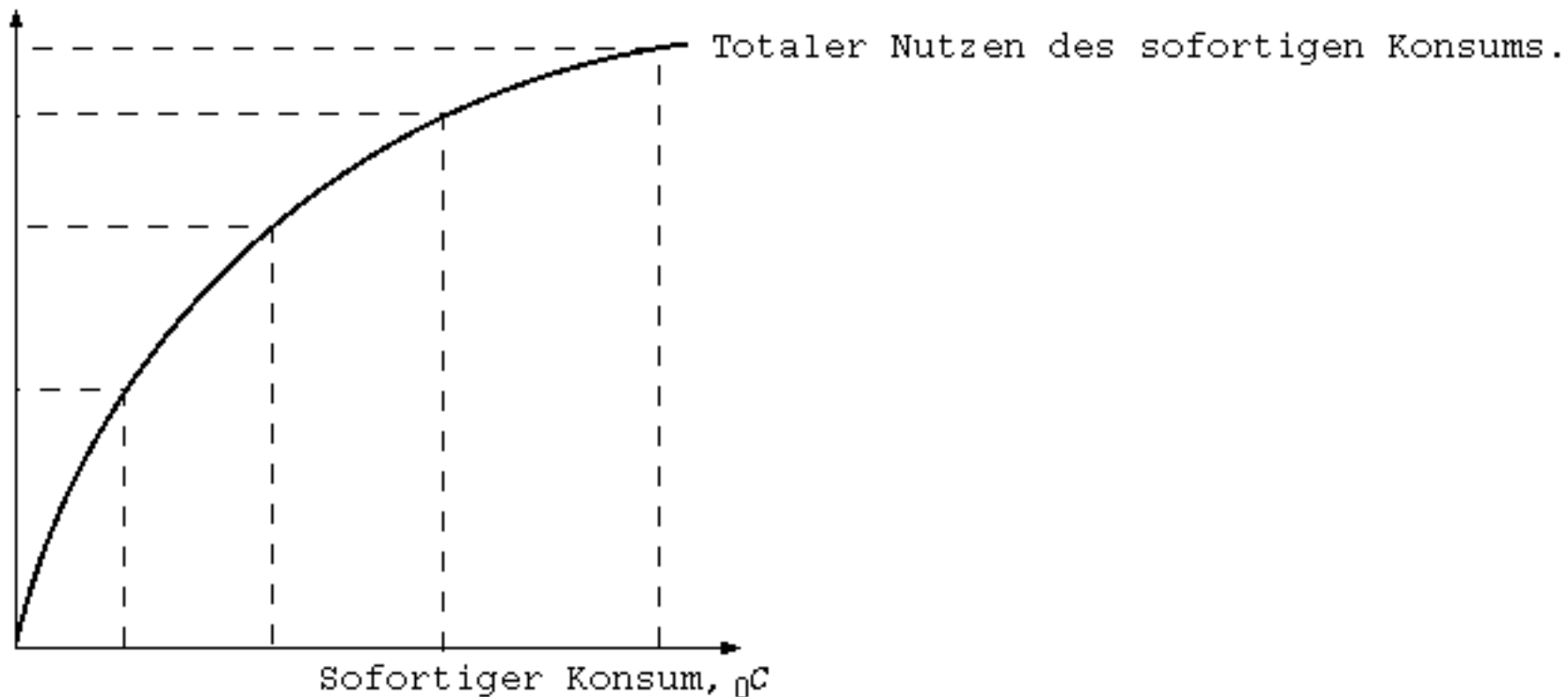


Investitionsentscheidungen unter Sicherheit

Warum kann man Investitionsentscheidungen unabhängig von den Investoren treffen?

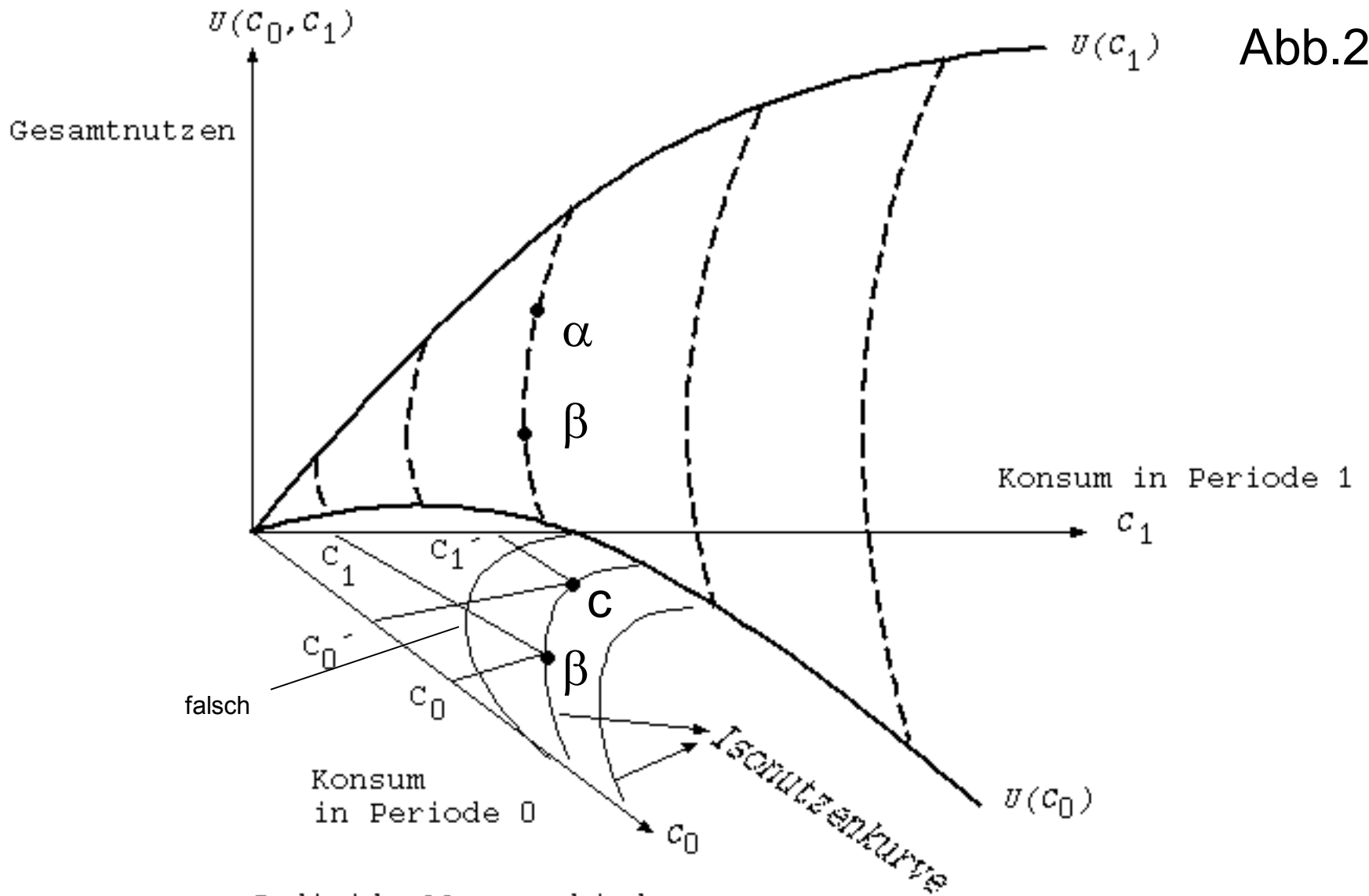
1-Perioden-Modell

Gesamtnutzen = $U(c)$



Abnehmender Grenznutzen

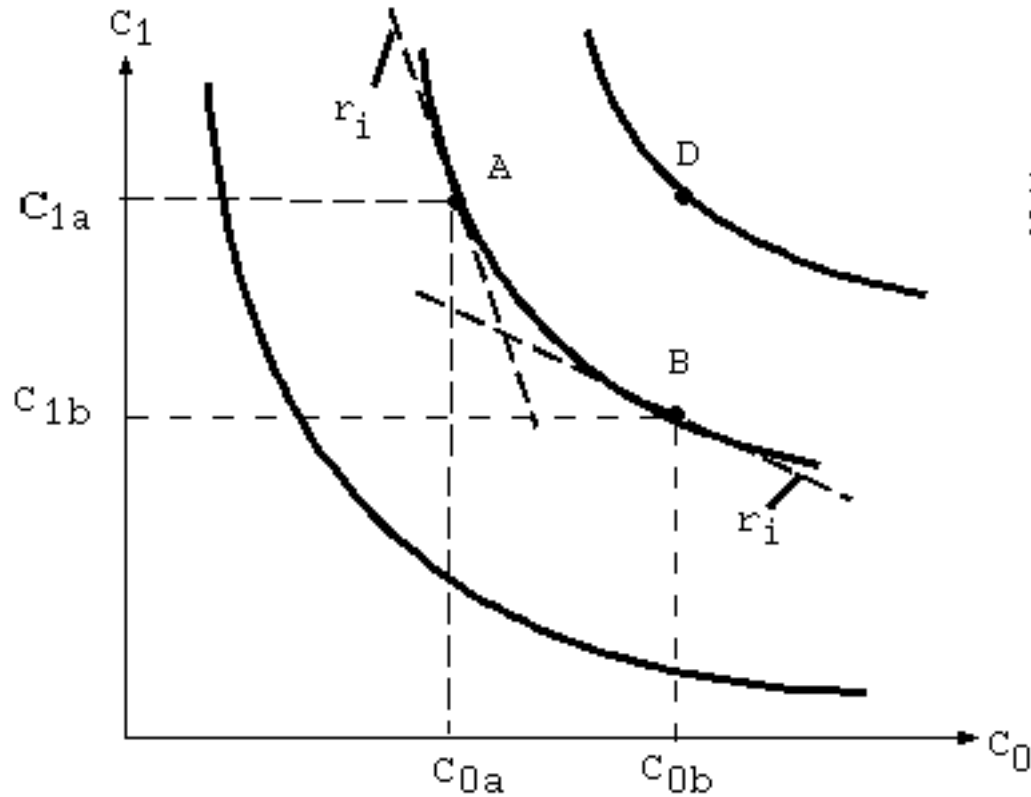
Abb.2



Individuell verschieden:
Diag.2: Trade-offs zwischen sofortigem Konsum und Konsum
in nächster Periode

Abb.3

Indifferenzkurven, die die Zeitpräferenz des Konsums darstellen.

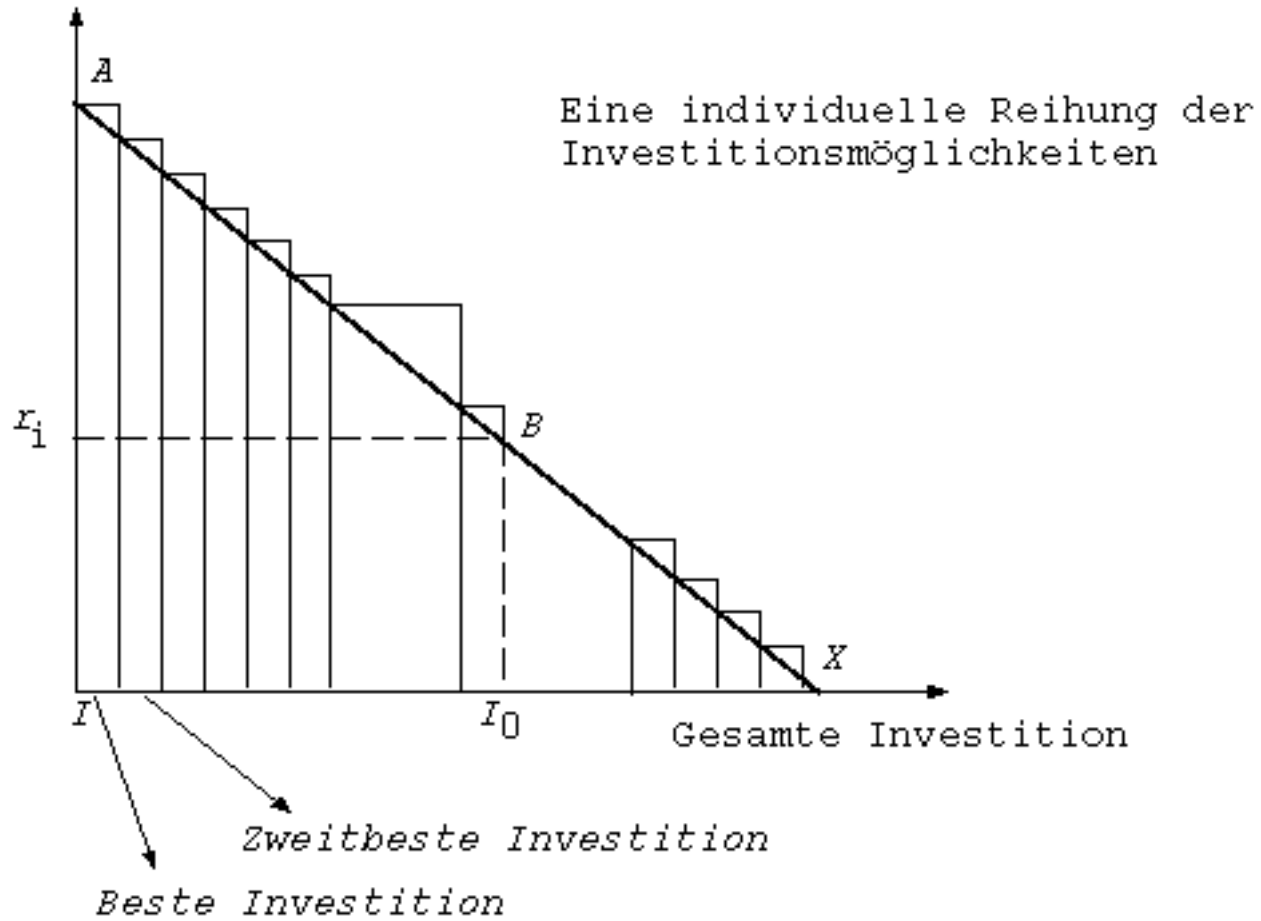


r = subj. Rate der Zeitpräferenz (quasi Zins)

$$\text{GRS}_{\substack{C_0 \\ C_1}} = \frac{\partial C_1}{\partial C_0} \Big|_{U=\text{konst}} = -(1+r_i)$$

Abb.4

Grenzertrag



ad. Abb.5:

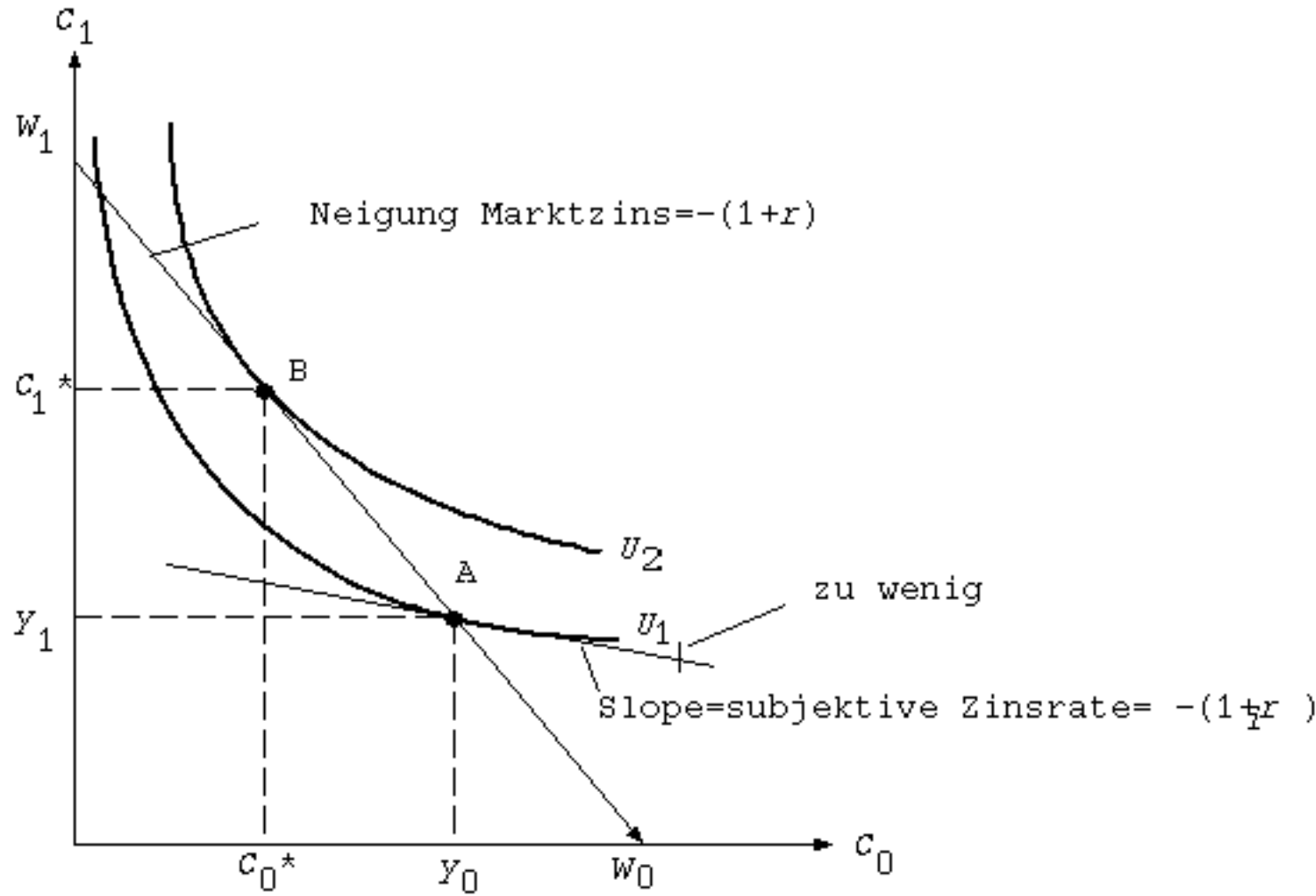
Robinson-Crusoe-Ökonomie:

Keine Möglichkeit intertemporären Konsumausgleichs zwischen Individuen.

GRS = GRT auf Punkt B

Problem: Individuen mit unterschiedlicher Indifferenzkurven wählen andere (opt.) Produktion!

Einführung eines Kapitalmarktes
 y_0, y_1 fixe Zuwendung (mit U_1)
 Trotzdem höherer Nutzen U_2 über Verleihen möglich.



The capital market line.

ad. Abb.6

$$W_0 = Y_0 + \frac{Y_1}{1+r}$$

(Y_0, Y_1) hat Nutzen U_1 ; man kann durch leihen (und borgen) auf Kapitalmarktlinie Punkt B erreichen mit höherem Nutzen U_2 .

r = Marktzinssatz, zu dem unbeschränkt Geld geliehen oder verliehen wird. (Ergibt sich eigentlich als Lösung eines Gleichgewichtsproblems in einer Ökonomie!)

$$W_0 = C_0^* + \frac{C_1^*}{1+r}$$

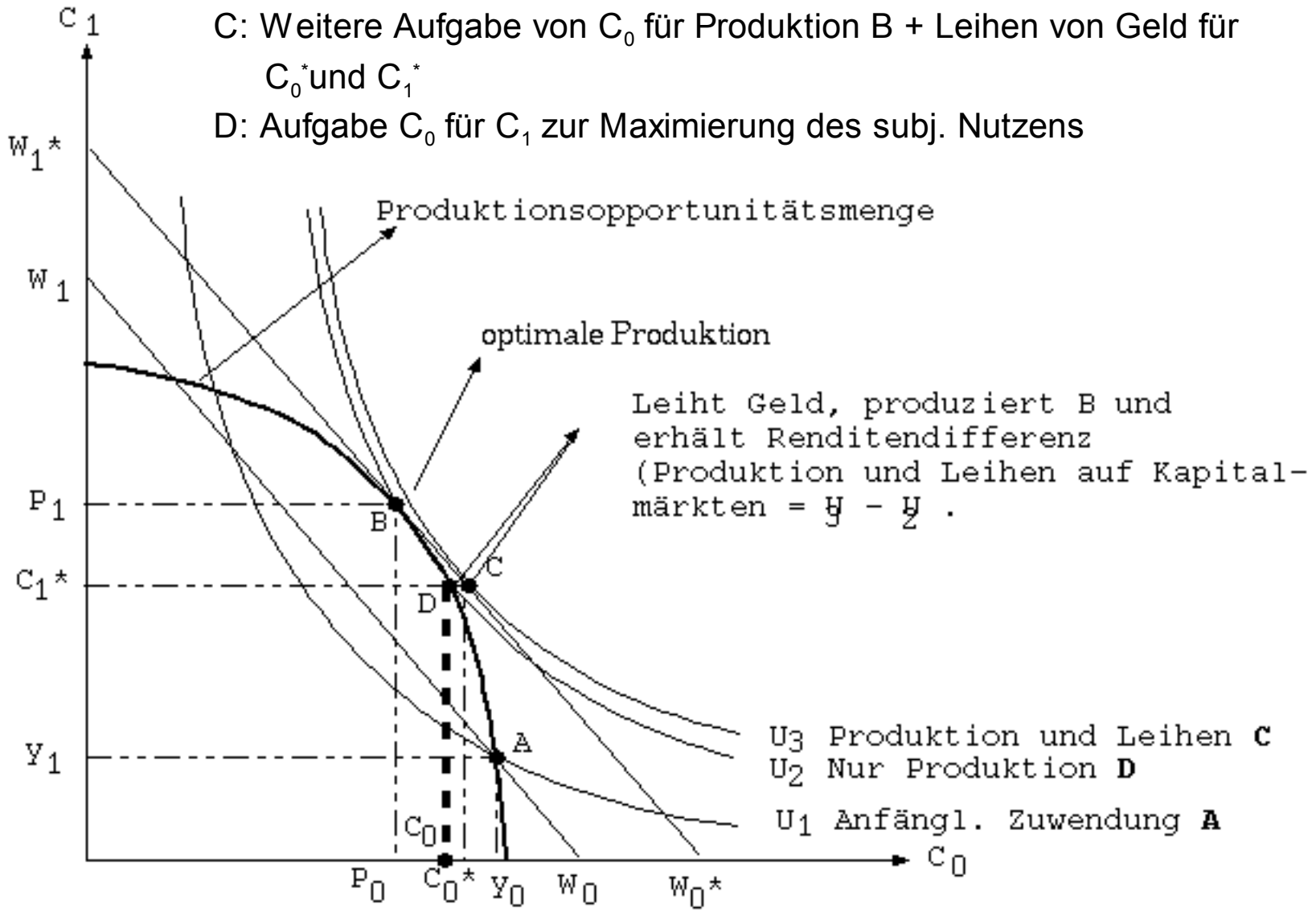
$$C_1^* = W_0(1+r) - (1+r)C_0^* \text{ bzw. } W_0(1+r) = W_1$$

$$C_1^* = W_1 - (1+r)C_0^*$$

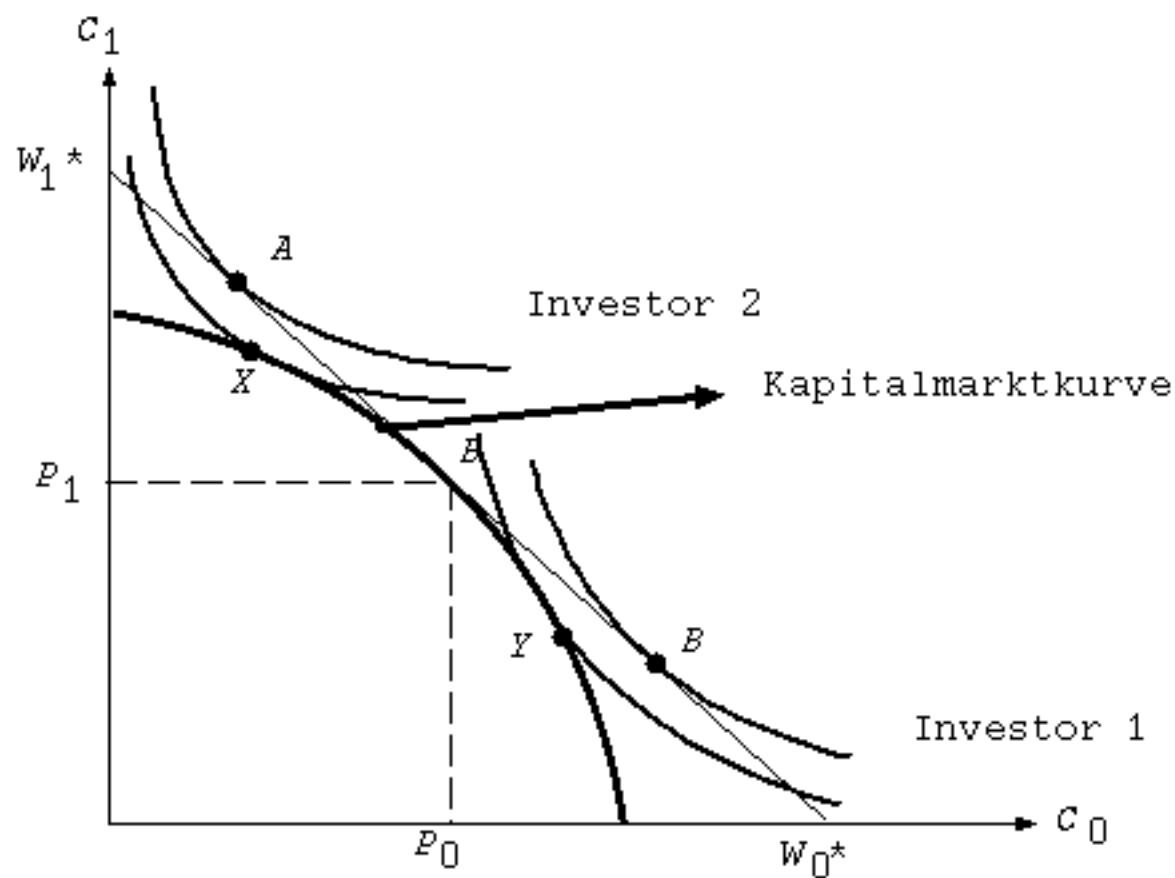
A: Anfangszuwendung

C: Weitere Aufgabe von C_0 für Produktion B + Leihen von Geld für C_0^* und C_1^*

D: Aufgabe C_0 für C_1 zur Maximierung des subj. Nutzens



Fishers Separations Theorem. Bei perfekten und vollständigen Kapitalmärkten ist die Produktionsentscheidung nur durch die objektiven Marktkriterien bestimmt ohne Berücksichtigung der subjektiven Präferenzen, die in die Konsumentenentscheidung des Individuums eingehen.

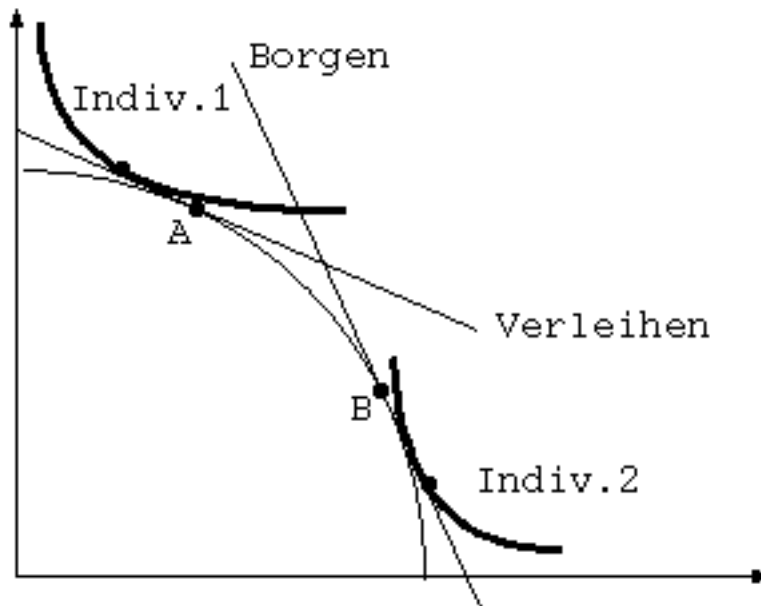


ad Abb.8:

Die Investitionsentscheidung ist von den individuellen Präferenzen unabhängig.

$$GRS_i = GRS_j = -(1+r) = GRT$$

Breakdown des Separationstheorems:



Transaktionskosten: Einrichtung zentraler Märkte

Annahme: vollkommene Kapitalmärkte vereinfachen vieles -
tatsächlich nicht wahr.

Frage: Wie weit gilt Modell? (Analog: Euklidische + sphär.
Trigonometrie.)

Investitionsentscheidung: Wieviel konsumieren wir heute nicht
zugunsten der Zukunft?

Manager sind „Agents of Owner!“

Ziel: Maximiere Nutzen der Eigner: C_0 - Dividende

C_1 - Reinvestition in Prod.

Grundannahme: - r ist deterministisch

- keine Transaktionskosten

- Zukünftige Erträge d. Investition sind mit

Sicherheit bekannt

Fishers Separations Theorem erlaubt
Investitionsentscheidung ohne Kenntnis der Präferenzen
(Nutzenfunktion) der Eigner.

Problem: Agency-Problem

(Nebenleistungen in Aktien - kein Agency-Problem)

Nebenleistungen an Manager nur daher beschränkt
kontrollierbar.

Maximierung des Wohlstands der Eigner $W_0 (= S_0)$:

(Auszahlungen)

$$S_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\text{Div}_t}{(1+k_s)^t}$$

k_s = Ertrag von Anteilen am Markt (Opportunitätskosten des Kapitals)

d.h. Barwert der Erträge des Anteils (Aktie) ist ihr Marktwert (enthält alle Wertsteigerungen!) (ohne Steuer)

Bsp.: Aktie:

1) Dividende v. 1 GE und Dividende wächst mit 5 %

2) $k_s = 10 \%$

Gordons Wachstums-
Formel!

$$S_0 = \frac{\text{Div}_1}{k_s - g} = 20 \text{ GE}$$

(für $k_s > g$)

$$\text{Div}_6 = \text{Div}_1 (1+g)^5 = 1,2763$$

$$S_5 = \frac{1,2763}{0,05} = 25,52..$$

$$S_0 = \sum_{i=1}^5 \frac{\text{Div}_i}{(1+k_s)_i} + \frac{S_5}{(1+k_s)_i}$$

$$= \sum_{i=1}^5 \frac{\text{Div} (1+g)^{i-1}}{(1+k_s)^i} + \frac{S_5}{(1+k_s)_i} = 20$$

Für Investitionsrechnung gilt (keine Steuern):

$Div_t = Ertg_t - (\text{Löhne} + \text{Material} + \text{Dienstleistungen}) - \text{Investitionen}$

und

$$S_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Ertg_t - (L\&M\&D)_t - I_t}{(1+k_s)^t}$$

= Disc. Cash Flow (DCF!)

Also:

Max. Wohlstand d. Eigner = Max. abgezinster CF!

Modelle für Investitionsentscheidungen = **Capital budgeting techniques.**

Anforderungen an Projektauswahlverfahren:

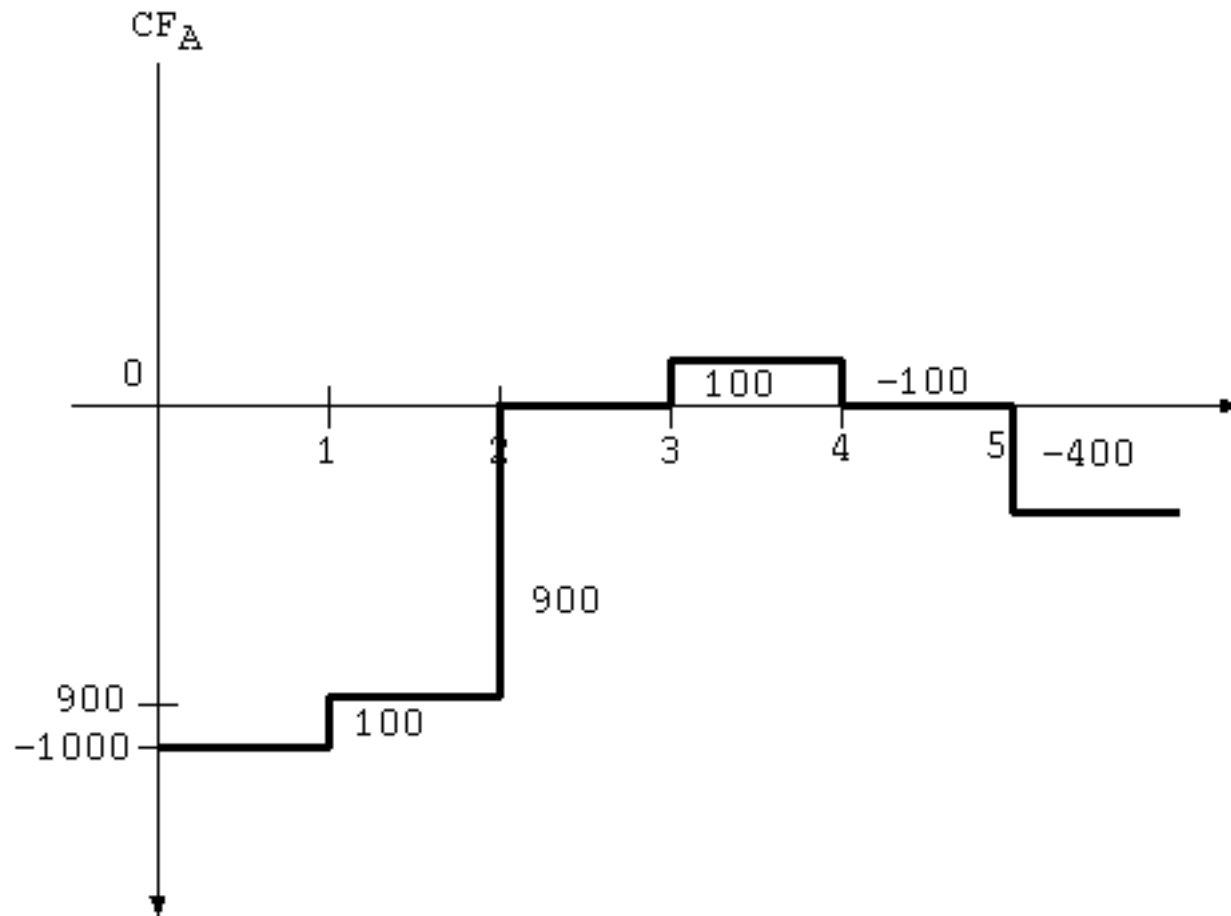
- 1) CF sollten verwendet werden.
- 2) CF sollten zu Opportunitätskosten diskontiert werden.
- 3) Entscheidungstechn. sollten aus einer Menge sich gegenseitig ausschließender Projekte wählen
- 4) Wertadditivitätsprinzip: Projekte sollten unabhängig voneinander betrachtet werden können ($V = \sum V_j$)

**Wie werden Investitionsentscheidungen
unabhängig von den Investoren getroffen?**

Four Mutually Exclusive Projects					
Cash Flows					
Year	A	B	C	D	PV Factor at 10 %
0	-1000	-1000	-1000	-1000	1000
1	100	0	100	200	.909
2	900	0	200	300	.826
3	100	300	300	500	.751
4	-100	700	400	500	.683
5	-400	1300	1250	600	.621

Amortisation: Project A, 2 years; Project C, 4 years
Project B, 4 years; Project D, 3 years

Projekt A



Problem: Nicht additiv, keine Diskontierung,
(nicht eindeutig)

Accounting Rate of Return

Buchhalter. Ertragsrechnung (ROI, RO Assets = ROA):

Zuflüsse sind nicht CF sondern After Tax Profits!

Annahme: Erträge sind nicht CF, sondern „After Tax Profits“!

$$\text{Projekt A: } \frac{-1000 + 100 + 900 + 100 - 100 - 400}{5} = -80$$

$$\frac{1}{I_0} \sum_{i=1}^N \text{ATPr}_i = \text{ARR} = \frac{\text{Average after-tax profit}}{\text{Initial outlay}} = \frac{-80}{1000} = -8 \%$$

Project A, ARR = -8 % Project C, ARR = 25 %
Project B, ARR = 26 % Project D, ARR = 22 %

Kritik: no CF - no Cashflow
no Discounting

Barwertverfahren (PV – Present Value)

<i>(Cash Flow)</i>	<i>x (PV Factor)</i>	<i>= PV</i>
-1000	1000	-1000.00
100	.909	90.90
900	.826	743.40
100	.751	75.10
-100	.683	-68.30
-400	.621	-248.40
		NPV = -407.30 = Barwert

$$NPV = \sum_{i=1}^N \frac{NCF_t}{(1+k)^t} - I_0$$

Opportunitätskosten des Kapitals

wurde gewählt!

Project A, NPV = -407.30; Project C, NPV = 530.85

Project B, NPV = 510.70; Project D, NPV = 519.20

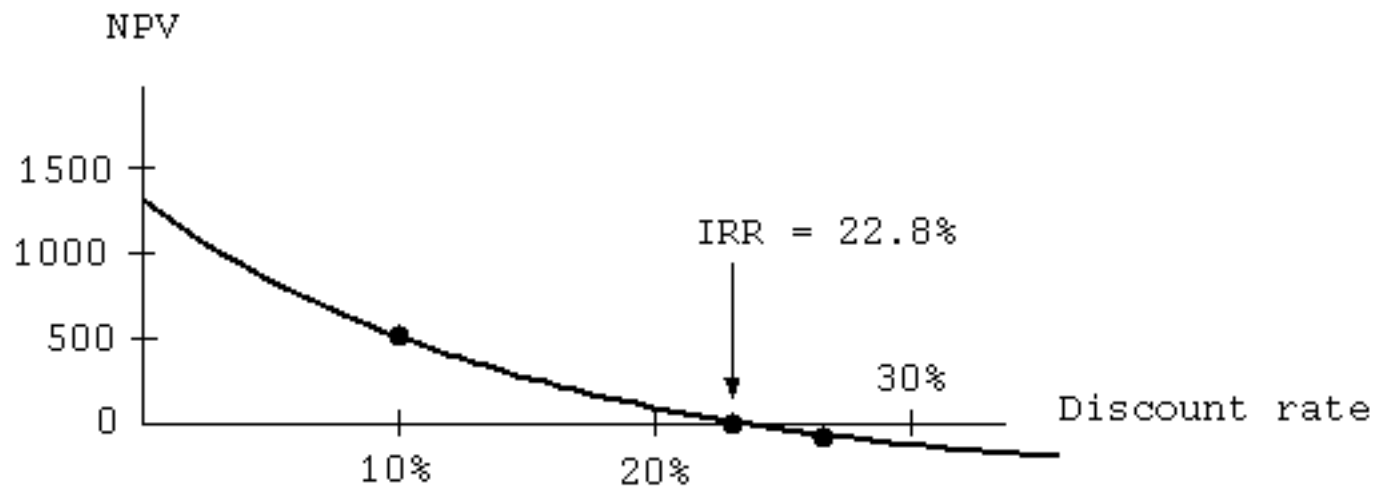
Gegen Intuition: Bei negativem Barwert gilt: weniger Zins „erhöht“ negativen Wert. Bsp: 3 % → 1 Mio. neg. Barwert; 10 % → 1/2 Mio neg. Barwert.

Interner Zinsfuß (Internal Rate of Return) für Projekt C

Year	Cash Flow	PV at 10 %		PV at 20 %		PV at 25 %		PV at 22.8 %	
0	-1000	1.000	-1000.00	1.000	-1000.00	1.000	-1000.00	1.000	-1000.00
1	100	.909	90.90	8.33	83.33	.800	80.00	.814	81.40
2	200	.826	165.20	.694	138.80	.640	128.00	.663	132.60
3	300	.751	225.30	.579	173.70	.512	153.60	.540	162.00
4	400	.683	273.20	.482	192.80	.410	163.84	.440	176.00
5	1250	.621	776.25	.402	502.50	.328	410.00	.358	447.50
			530.85		91.13		-64.56		-.50

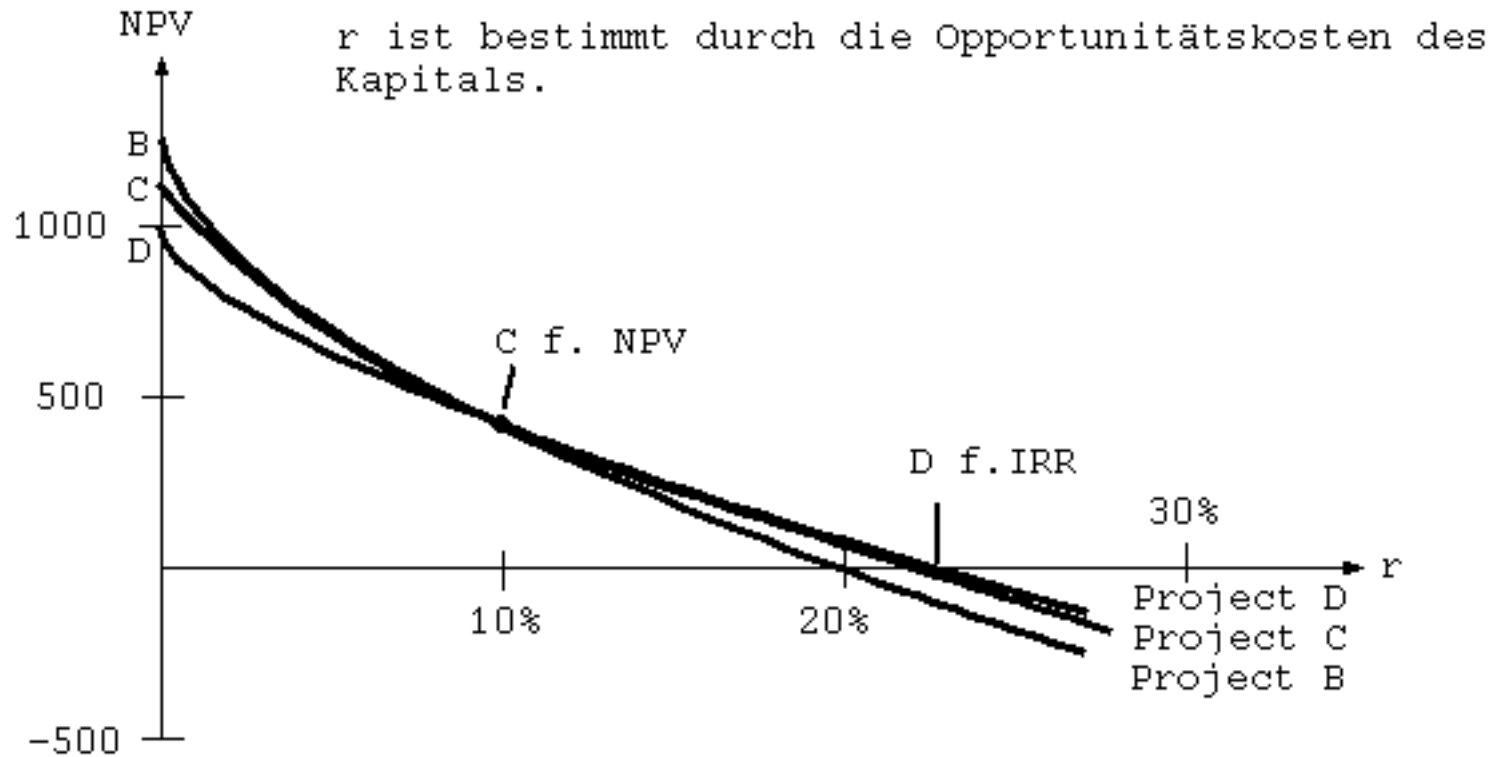
$$NPV = 0 = \sum_{t=1}^N \frac{NCF_t}{(1+IRR)^t} - I_0$$

Project A, IRR = -200%
Project B, IRR = 20.9%
Project C, IRR = 22.8%
Project D, IRR = 25.4% - wurde gewählt!



NPV of project C at different discount rates.

Barwert und interner Zinssatz



Kritik: interner Zins

- a) diskontiert nicht zu den Opportunitätskosten des Kapitals
- b) nimmt implizit an, der Zeitwert des Geldes sei gleich Interner Zins: **Reinvestitionsratenannahme** (Verletzt somit auch Fishers Separation Theorem)
- c) Kann gezeigt werden, verletzt **Wertadditivitätsprinzip** (Prinzip: Wert des Ganzen ist gleich Summe der Teile)
- d) Mehrfacher Interner Zinsfuß möglich

Folge: DCF ist das einzig vertretbare Verfahren zur Wahl von Projekten zur Maximierung des Wohlstands des Eigners.

Project Evaluation Techniques

<i>Technique</i>	<i>Percentage Using in *</i>		
	1970	1964	1959
<i>Profit contribution analysis required:</i>			
For over 75% of projects	53	53	50
For 25% - 75% of projects	41	40	34
For less than 25% of projects	6	7	16
Total	100	100	100
<i>Minimum profitability standards required:</i>			
For most projects	77	65	58
For some projects	13	23	20
For few projects	10	12	22
Total	100	100	100
<i>Most sophisticated primary evaluation standard:</i>			
Discounting (rate of return or present worth)	57	38	19
Accounting rate of return	26	30	34
Payback of payback reciprocal	12	24	34
Urgency	5	8	13
Total	100	100	100

*Percentages shown are yes divided by yes + no, multiplied by 100.

"Klassischer" Überblick über
THEORIE DER
INVESTITIONSENTSCHEIDUNG (Investment)

(Investitionstheorie)

Investition unter
SICHERHEIT:
Robinson-Crusoe-Ökonomie
Gelmort
Fisher Separation Theorie
- Investrechnungsverfahren
Amortisation
ARR
NPV
IRR
Nicht: unterschiedl. t
Opt. Invest.progr.(=LP)

(Finanzierungstheorie
+Nutzentheorie
+Entscheidungstheorie)

Investition unter
UNSICHERHEIT:
Nutzen und Risiko, (μ, σ) -Pr.
Markow. Opt. Portfeuille
Separationsth.
CML
CAPM
Optionspreistheorie
Europ. Kaufoption
PUT-CALL-Parity
Nicht: Andere Derivative, Real Opt.

Basis der Industrie und neueren Theorie

Invest. unter Sicherheit

OR-Methoden u. Anw. (LP, Dyn.P,
usw.)

Ressourcenverteilungsmodelle
(Norden, Porr, Putnam Kelley
etc.)

Ressourcenallokation : Gen.
Neyman-Pearse etc)

Verwendet:

- Copeland West... (3.Auflage, 1988)

C....., Theorie + Copel.Pol. Add.

W.....,

- Uhler, Steiner Wertpapieranalyse,
1994

-harzyk, Finanzierungstheorie,
Vahler, 1980

- Ferschl, Nutzen- u.
Entscheidungstheorie,
Westdeutscher Verlag, Köln, 1970

Invest. unter Unsicherheit

State Preference Modell

Der..... Analysis

Ressourcenallokation von
Search Theory

Fehlen: Neuere „Derivatives“
Futures SWAPS, etc.

Investitionsentscheidungen unter Unsicherheit

St. Petersburg Paradoxon:

Münzwurf:

Wenn das 1. Mal Wappen nach N Würfeln auftritt, dann wird bezahlt 2^N .

Erwarteter Wert: $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^i} = 1+1+\dots$

Ergebnis: Das Spiel ist seinen Erwartungswert nicht wert!

Beweis: **Introspektion**

LÖSUNG:

Individuen interessiert nicht der Geldwert, es interessiert der subjektive Nutzen des Geldwertes:

Grenzertrag von Geldeinkommen nimmt mit Zunahme des Einkommens ab!

Erwarteter Nutzen:

Wert des Spiels für Individuum $U(x) = \log_2(n)$

Erwarteter Nutzen:

$$\sum_{\{i\}} \frac{1}{2^i} U(2^i) = \sum_{\{i\}} \frac{1 \cdot i}{2^i} = 2$$

Hypothese:

Individuen wählen in Unsicherheit nach erwarteten Nutzen.

Individuen verwenden **Bayes Entscheidungsregel!**

(Subjektive Wahrscheinlichkeit + erwarteter Nutzen \rightarrow N-M-Axiome rat. Verhaltens Übereinstimmung)

Unter den Voraussetzungen des N-M-Axiomensystems kann man eine Nutzenfunktion $u: W \rightarrow \mathbb{R}^1$ konstruieren, die effizienter verwendbar ist als ein ordinaler Nutzenindex:

AXIOMENSYSTEM von V. Neumann - Morgenstern

N1. Auf der Menge der Lotterien W existiert eine schwache Präferenzrelation „ \preceq “, es sei „ $<$ “, die zur Relation „ \preceq “ gehörige strikte Präferenz.

N2. Es seien P, Q, R Lotterien und $0 < \alpha \leq 1$, dann gilt

$$P < Q \Rightarrow \alpha P + (1 - \alpha)R < \alpha Q + (1 - \alpha)R$$

N3. P, Q, R seien Lotterien und $P < Q < R$, dann gibt es Zahlen α, β mit $0 < \alpha < 1$ und $0 < \beta < 1$, so daß gilt:

$$\alpha P + (1 - \alpha)R < Q < \beta P + (1 - \beta)R.$$

Erwartungsnutzen

Definition: Eine Funktion $U:W \rightarrow R^1$ heißt Erwartungsnutzen, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

A) Ordnungstreue (Monotonie):

$$P \preceq Q \Leftrightarrow u(P) \leq u(Q)$$

B) Linearität:

$$\begin{aligned} & u(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_K P_K) \\ &= \alpha_1 u(P_1) + \alpha_2 u(P_2) + \dots + \alpha_K u(P_K) \end{aligned}$$

C) Eindeutigkeit bis auf positiv-lineare Transformationen:

seien u, v zwei Funktionen, welche A) und B) erfüllen,

dann gilt: $u(P) = \mathbf{A}v(P) + \mathbf{B}$ mit $\mathbf{A} > 0$

Hauptsatz der kardinalen Nutzentheorie

Auf einer Menge von Lotterien W , welche

1. die Axiome von v. Neumann - Morgenstern erfüllen und
 2. in der es mindestens ein paar P, Q mit $P < Q$ gibt
- existiert ein Erwartungsnutzen:

Beweisidee: Setze $u(P) = 0$ und $u(Q) = 1$

A) Für $P < R < Q$ kann man aus Axiomen folgern:

Es gibt ein eindeutiges λ ($\lambda \in (0, 1)$), so dass $R \sim \lambda P + (1 - \lambda)Q$ gilt.

Hieraus: $u(R) = 1 - \lambda$

(R heißt Sicherheitsäquivalent von $\lambda P + (1 - \lambda)Q$)

analog: $R < P < Q$ und $P < Q < R$

Bernoulli-Prinzip:

$\exists \mathcal{C}$ ist meist eine Menge von monetären Konsequenzen (homogenes Gut).

$$u_0: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1 \text{ mit } u_0(x) = u\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ (oft einfach } u(x))$$

Ergebnis des Hauptsatzes:

$$u(P) = E(u(x)) \text{ für } P \in W$$

Beispiel:

$$P = \left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ p & 1-p \end{array} \right]$$

Zwei Zufallsvariable: $u(x)$ (Nutzen $u(x_i)$ mit Wahrscheinl. p_i)

x (Geldbetrag x_i mit Wahrscheinl. p_i)

Nach Hauptsatz gilt: $u(P) = p u(x_1) + (1-p) u(x_2)$ (=E(u(x)))

Meist gilt zudem $u(P) \neq E(x)$ außer wenn $u(x)$ linear

Nutzenfunktion:

Problem des Sicherheitsäquivalents:

Finde einen Wert ξ derart, dass z.B. (Zweipunktverteilung) gilt:

$$\begin{aligned} u(\xi) = u(P) &= p(u(x_1)) + (1-p)u(x_2) \quad (P \in W) \\ &= E(U(K)) \Rightarrow u^{-1}(E(u(x))) = \xi \end{aligned}$$

Experimentelle Ermittlung von ξ :

	p	1-p
A ₁	X ₁	X ₂
A ₂	ξ	ξ

Man ermittle ξ , so daß $A_1 \sim A_2$;

d.h. $\begin{bmatrix} p & 1-p \\ \xi & \xi \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} p & 1-p \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}$, also

$$U\{\xi\} = p u(\xi) + (1-p) u(\xi) = p u(x_1) + (1-p) u(x_2) \text{ also}$$

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 10 \\ \leftarrow 1/2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 20 \\ \leftarrow 1/2 \end{array} \right] \\ \leftarrow 1/2 \end{array} \right] = P \quad u(\xi) = E(u(X))$$

Bsp.: $p=0,5$; Bekannte Nutzenfunktion:

$$E(x) = 10 * 0,5 + 20 * 0,5 = 15$$

$$E(U(x)) = 40 * 0,5 + 10 * 0,5 = 25 = u(\xi)$$

$$U(E(X)) = \frac{15^2}{10} = 22,5$$

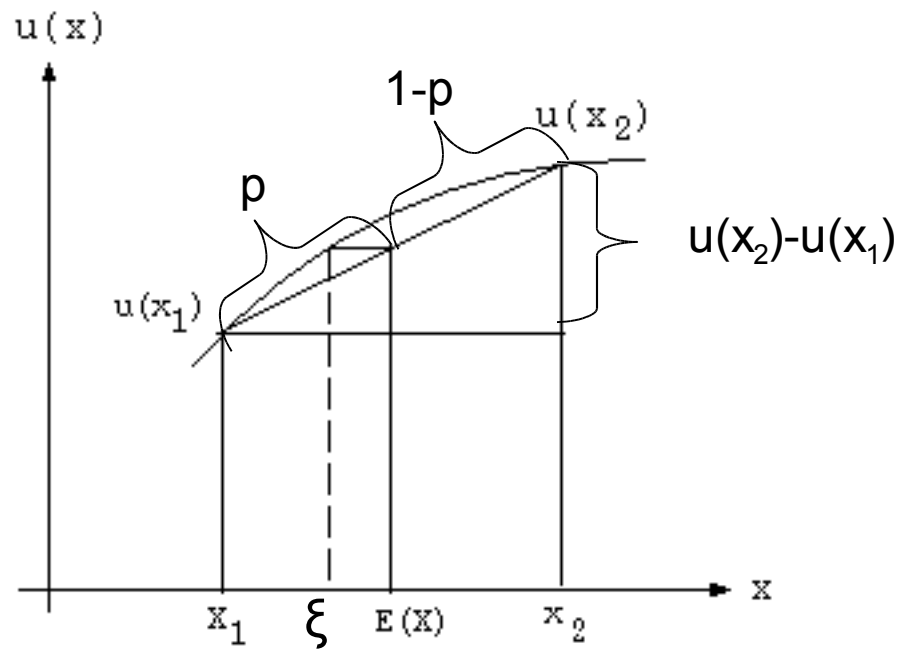
$$\xi = \sqrt{25 \times 10} \cong 15,8 (=u^{-1}(u(\xi)))$$

$$E(U(X)) = 25$$

$$u^{-1}(E(U(x))) = \xi > E(X) \Rightarrow \text{Risikofreude } (U^{-1}(U(E(X)))) = E(X)$$

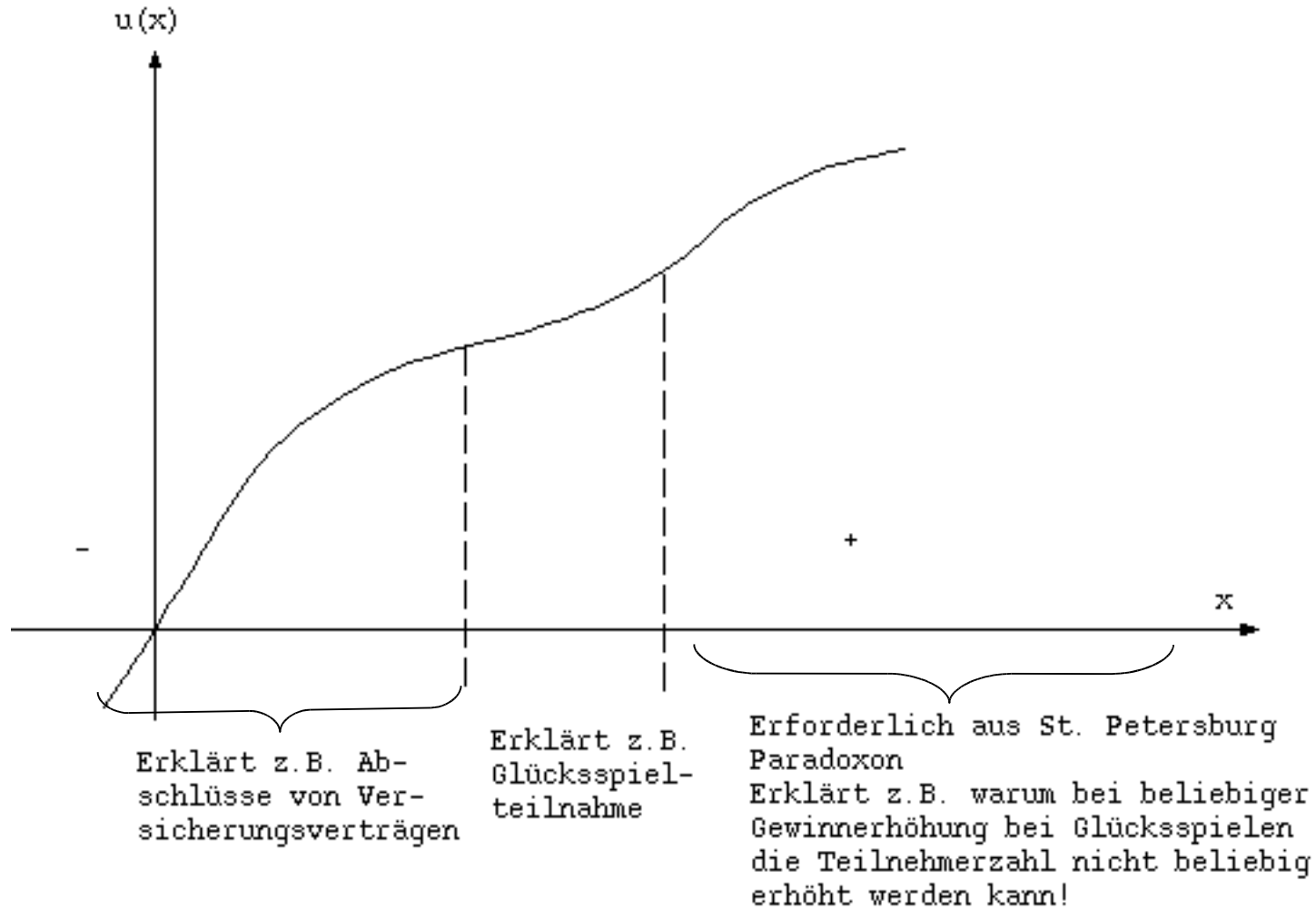
$$\xi < E(X) \Rightarrow \text{Risikoaversion}$$

RISIKOAVERSION ($u(x)$ IST KONKAV



Also: $\xi < E(x)$

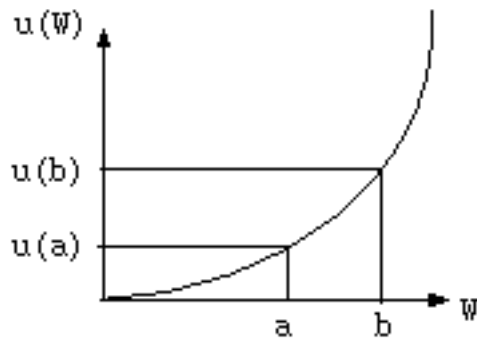
Nutzenkurve nach Friedmann & Savage (The Utility Analysis Of Choices And Risks; Journal Of Political Economy, pp. 279-304, 1948)



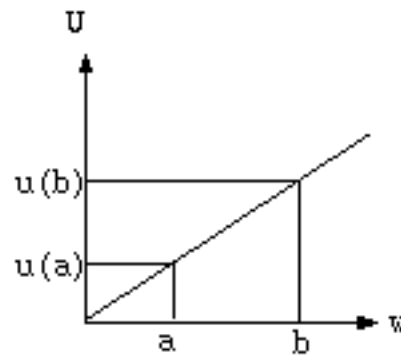
Risikoaversion und Risikoaversionsmasse

Kard. Nutzenfunktion ist unter gewissen rationalen Voraussetzungen aus Präferenzrelation \preceq bildbar.

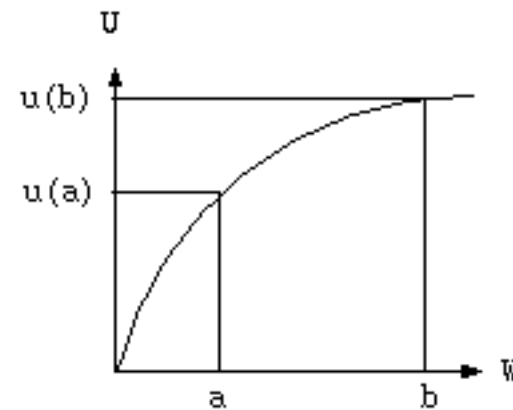
Bsp.: $a \rightarrow \alpha$
 $b \rightarrow 1 - \alpha$ } Wahrscheinlichkeit



Risikofreund
 $U[E(W)] < E(U(W))$



Risikoneutraler
 $U(E(W)) = E(U(W))$



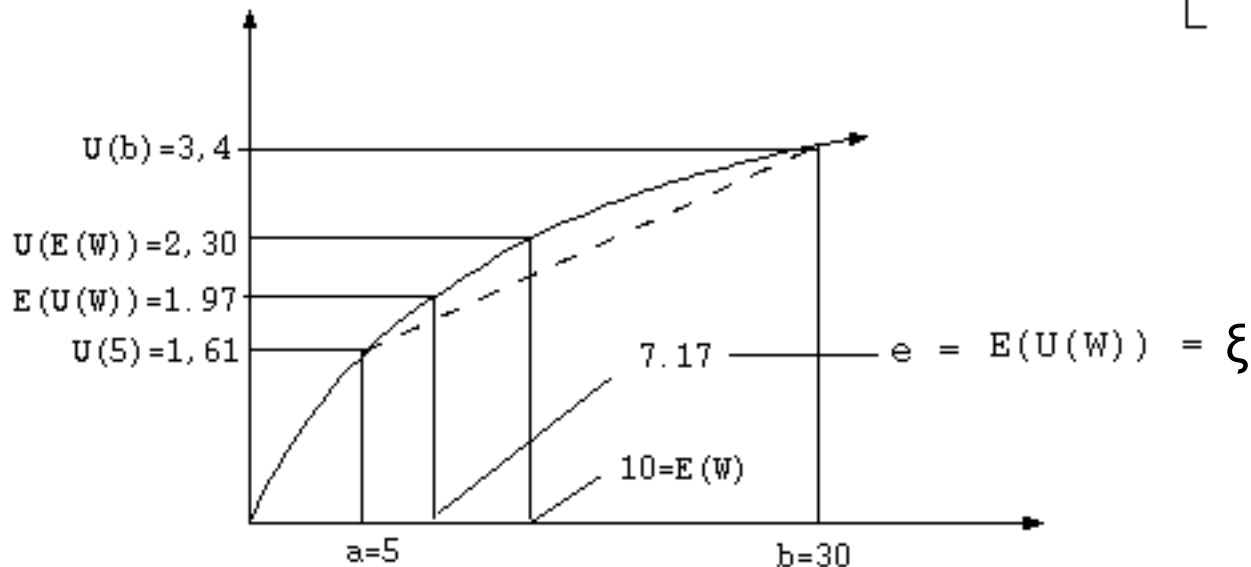
Risikofeind
 $U(E(W)) > E(U(W))$

Risikoprämie: Maximum an Wohlstand, den ein Individuum aufgeben würde, um Risiko zu vermeiden.

Markowitz'sche Prämie: $E(W) - \xi$ (von W abhängig)

Bsp.: Es gelten $U(W) = \ln(W)$ (logarithm. Nutzenfunktion)

$$\text{Lotterie: } \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 5 & 30 \end{bmatrix}$$



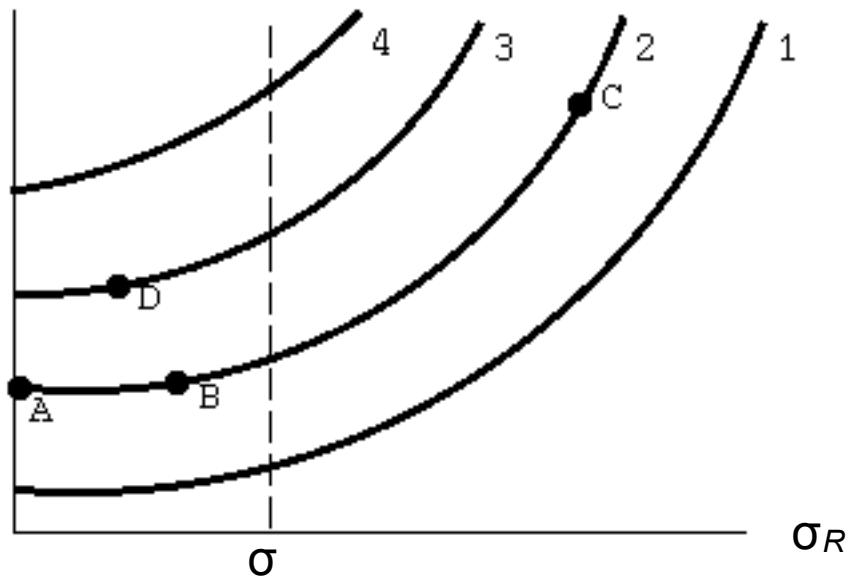
$$U(E(W)) = \ln 0.8 \times 5 + \ln 0.2 \times 30 = 2,3$$

$$E(U(W)) = 0.8 \ln 5 + 0.2 \ln 30 = 1,97$$

$$\text{Markowitz'sche Risikoprämie: } 10 - 7,17 = 2,83 = E(\xi) -$$

$$p=0,8 \text{ und } 1-p=0,2$$

$$E(R) = \mu$$



Indifference curves
for a risk-averse
investor.

Verteilung der Erträge:

gemeinsam normal verteilt + Risikoaversion

(multivariat normal), dann wird erwarteter Nutzen maximiert
durch beste Wahl der Kombinationen aus (μ, σ) .

Nutzentheorie:

Wenig emp. Test;

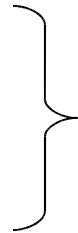
Psychologie:

z.B.: Kahneman & Tversky

Survival Frame

Mortality

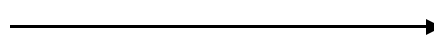
Signifikante Differenz



Krebsbehandlung

Savage

Bsp. (intuitiv intransitiv)



Ferschl

Resultat: Eher nicht realistisch

Risiko und Ertrag einer Investition

Anfangsinvestition = I

Wohlstand zu Ende Investitionsperiode = W

Zins:

$$R = \frac{W-I}{I}$$

$$W = (1+R) I$$

$$I = (1+R)^{-1} W$$

Problem:

Wie sollen Investitionsbeträge investiert werden! (In jedes mögliche Projekt)

Markowitz Ansatz:

Betrachte Trade-off von Risiko und Ertrag

Risiko: Fast immer mit VARIANZ modell.

Hauptidee: Ertrag von Investition ist ZV

Wie investiert man:

Investiere alles in das Projekt mit höchstem $E(W)$. (erwartetem Ertrag).

Investoren machen das nicht, da risikoavers.

Diversifikation reduziert Risiko!

Beispiel:

Portfolio aus 2 Investitionen (X,Y) mit Ertrag (R):

$$R_p = aX + bY \quad \text{mit} \quad b = 1-a$$

$$E(R_p) = a E(x) + b E(Y)$$

$$\sigma^2 (R_p) = a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 + 2ab \sigma_{xy}$$

Negative Kovarianz:

Gewinn in X \Rightarrow Verlust in Y

Investition partiell „gehedged“ \Rightarrow geringeres Risiko

<i>Wahrscheinlichkeit</i>	X_i	Y_i
0.2	11 %	-3 %
0.2	9 %	15 %
0.2	25 %	2 %
0.2	7 %	20 %
0.2	-2 %	6 %

$$E(X) = 10 \%$$

$$E(Y) = 8 \%$$

$$\sigma_x^2 = 0,0076$$

$$\sigma_y^2 = 0,00708$$

$$\sigma_{xy} = -0,0024$$

$$\rho_{xy} = -0,33 = \sigma_{xy} / \sigma_x \sigma_y$$

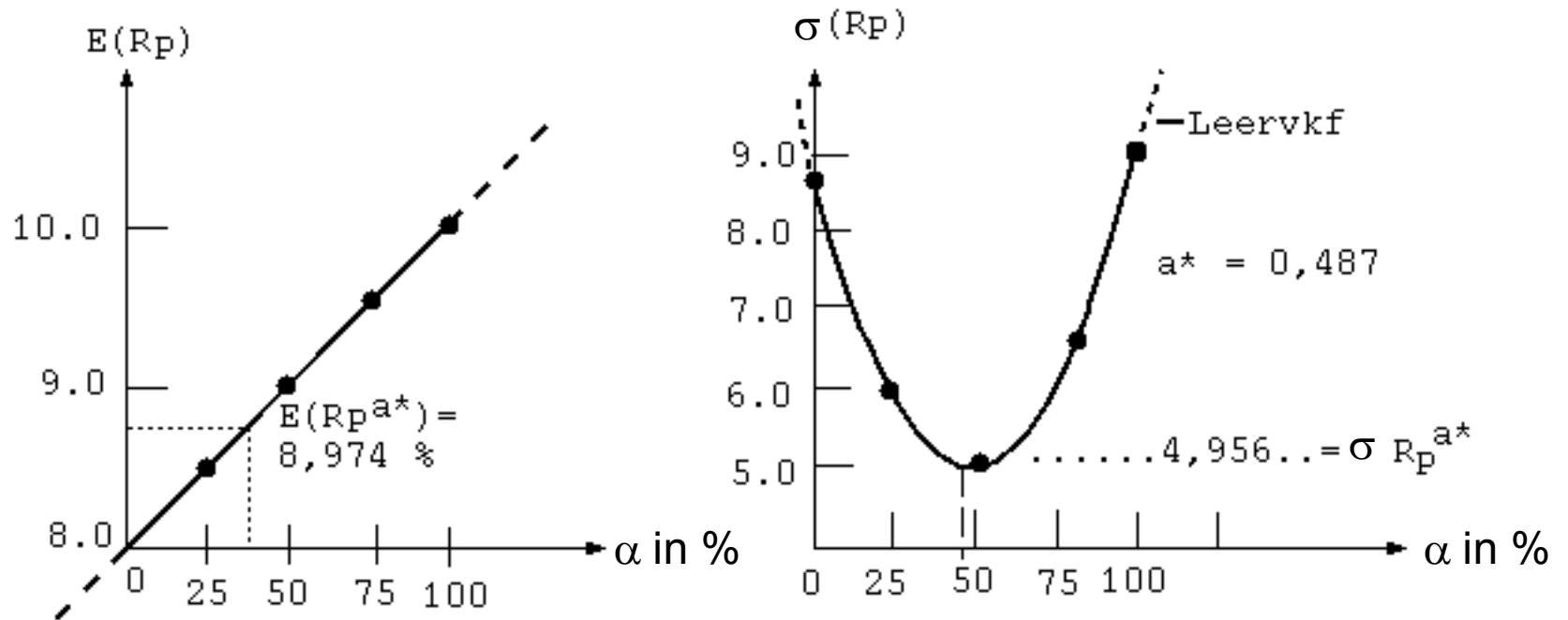
$$\sigma_{RP}^2 = a^2 \sigma_x^2 + (1-a)^2 \sigma_y^2 + 2a(1-a) \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y$$

$$\frac{d \sigma_{RP}}{da} = 0 \quad \longrightarrow \quad a^* = \frac{\sigma_y^2 - \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y} = \text{Optimum}$$

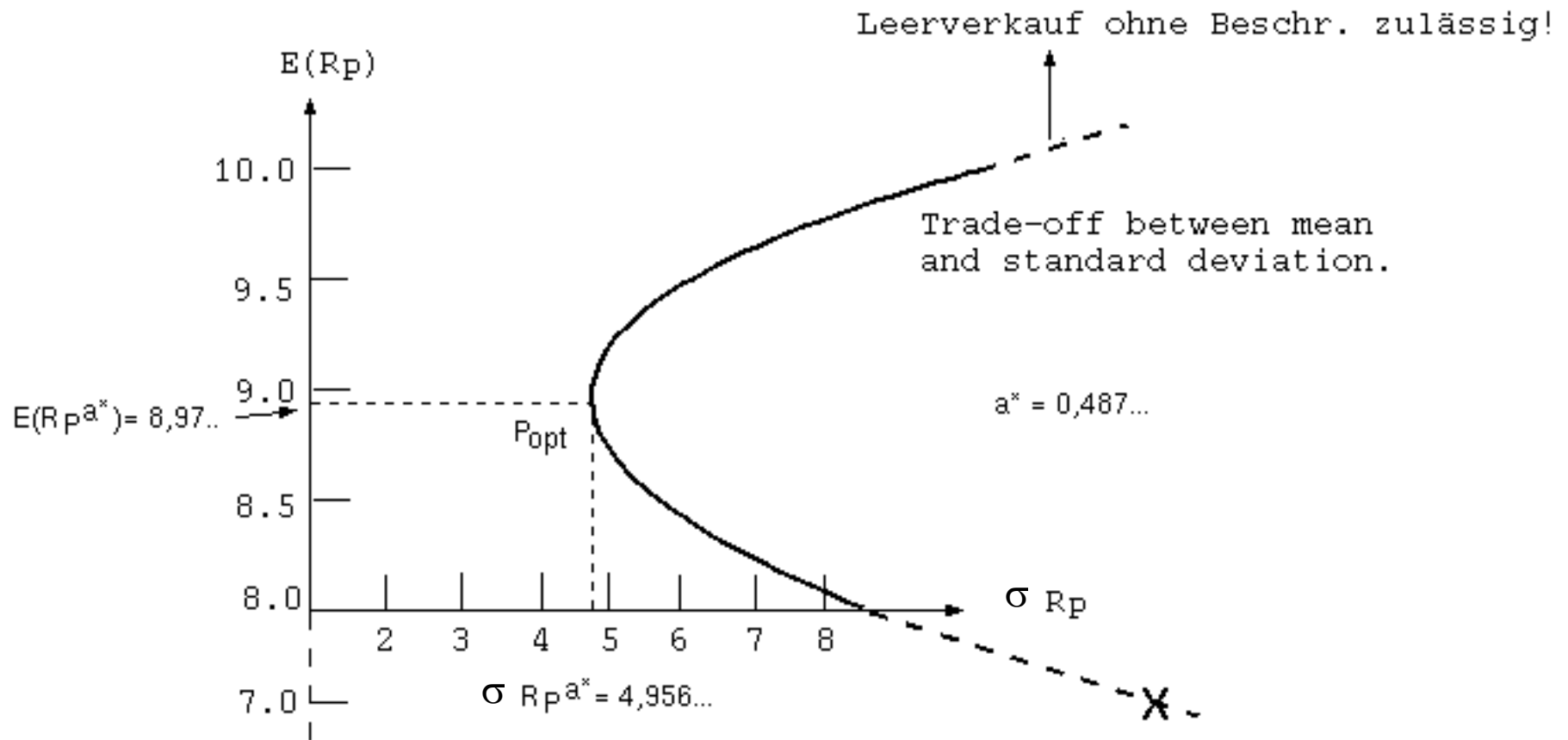
Mean and Standard Deviation of Returns

Percentage in X	Percentage in Y	E(R _P)	σ (R _P)
100	0	10,0 %	8,72 %
75	25	9.5	6.18
50	50	9.0	4.97
25	75	8.5	5.96
0	100	8.0	8.41

$$P = aX + (1-a)Y$$



The portfolio return mean and standard deviation as a function of the percentage invested in risky asset X.



Leerverkauf von 50 % in X und Kauf von 150 % in Y: $E(R_P) = -0.5 E(X) + 1.5 E(Y) = 0,07$

$$\sigma_{R_P} = 0,1464$$

Minimum Varianz Portfolio

$$\sigma_{R_p}^2 = a^2 \sigma_x^2 + (1-a)^2 \sigma_y^2 + 2a(1-a) \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y$$

$$\frac{d \sigma_{R_p}^2}{da} = 2a \sigma_x^2 - 2\sigma_y^2 + 2a\sigma_y^2 + 2 \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y - 4a \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y = 0$$

Minimale Varianz durch:

$$a^* = \frac{\sigma_y^2 - \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}$$

Bsp: $a^* = 0,487$

Opt. Portfolio: $E(R_p) = 8,974 \%$

$$\sigma_{R_p} = 4,956 \%$$

Perfectly Correlated

Security Returns

<i>Probability</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>
.2	-1.408 %	-3 %
.2	17.258	15
.2	3.777	2
.2	22.443	20
.2	7.925	6

$\sigma_X = 1.037$ $\sigma_Y = 8.72$ %,
 $\sigma_Y = 8.41$ %

$$\rho = -1$$

$$a^* = 0,49...$$

$$E(R_p^{a^*}) = 8,98.. \%$$

$$\sigma(R_p^{a^*}) = 0 \%$$

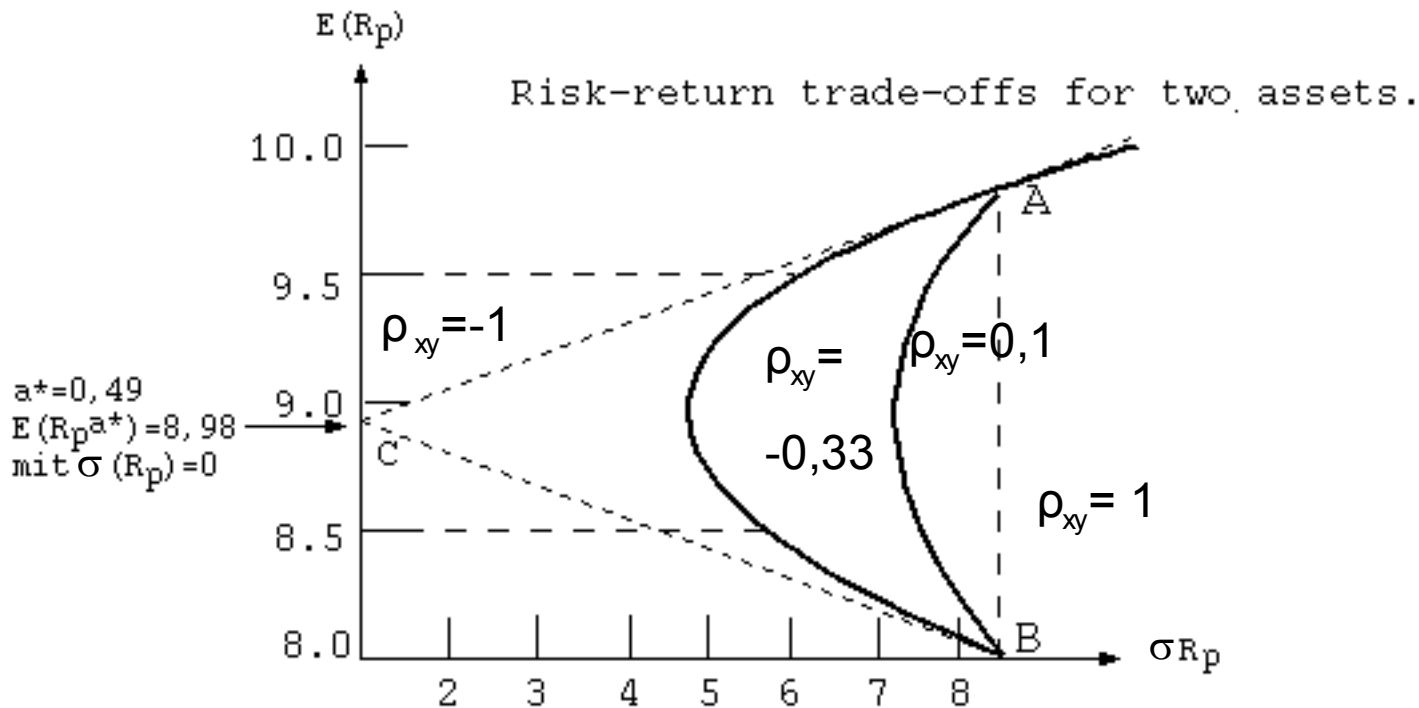
$$\text{COV}(X, Y) = \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y = .007334.$$

$$X = 1,037Y + 1,703$$

$$\rho_{xy} = 1$$

MINIMUM VARIANCE OPPORTUNITY SET

Ort aller Risiko-Ertrags-Kombinationen von Portfeuilleis risikoreicher Anlagen die minimale Varianz für gegebenen Ertrag R aufweisen.



$$\rho_{xy} = -1; \sigma_{Rp}^2 = (a\sigma_x - (1-a)\sigma_y)^2$$

$$\sigma_{Rp} = \pm (a\sigma_x + (1-a)\sigma_y)$$

Wahl des optimalen Portfolios

1) 2 risikoreiche Anlagen

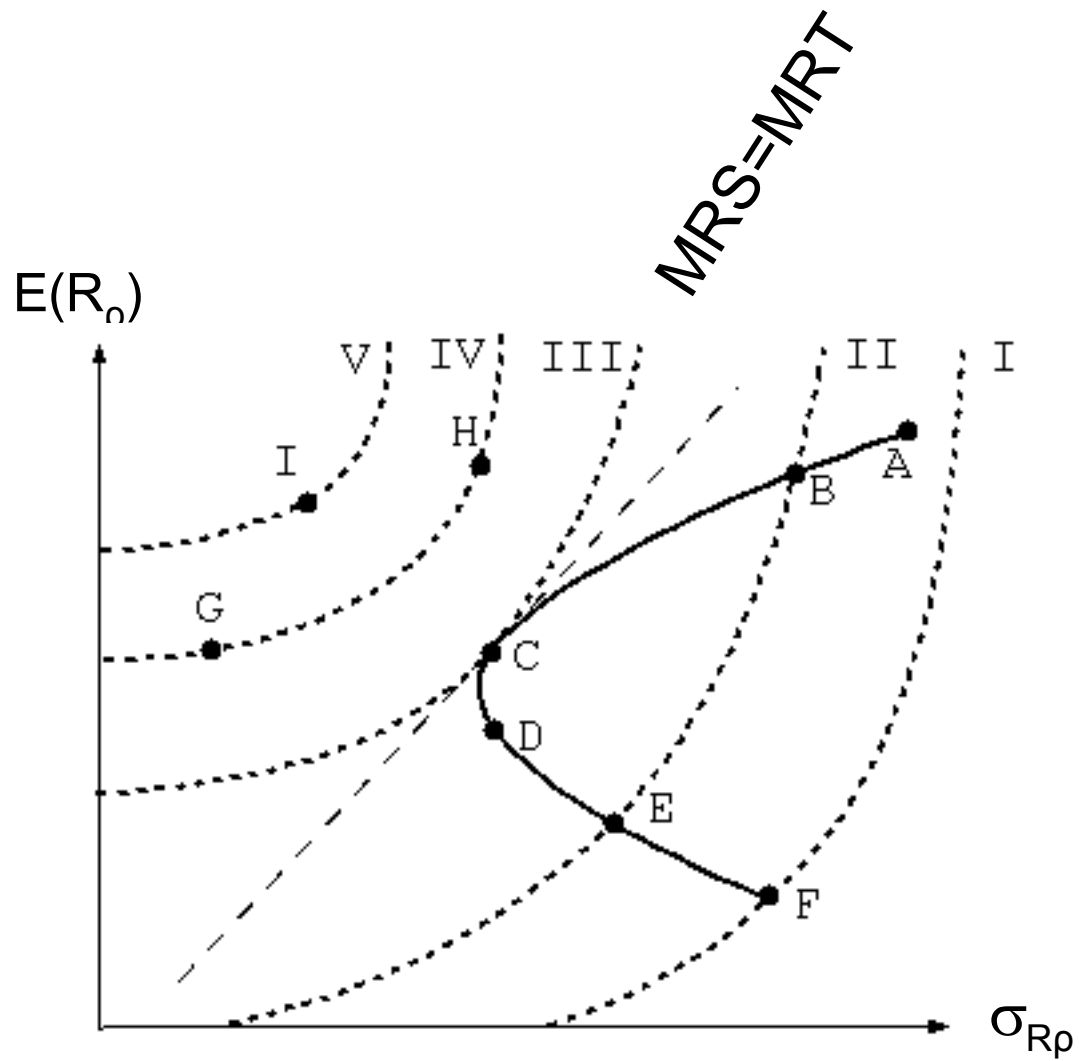
- Robinson-Crusoe-Fall: keine Tauschmöglichkeit
- R-C-Portfeuille:

Subjektive Grenzrate d. Subst. von Risiko + Ertrag =

Objektive Grenzrate d. Transformation

(M-Var.-Opt. Set) und Risiko + Ertrag

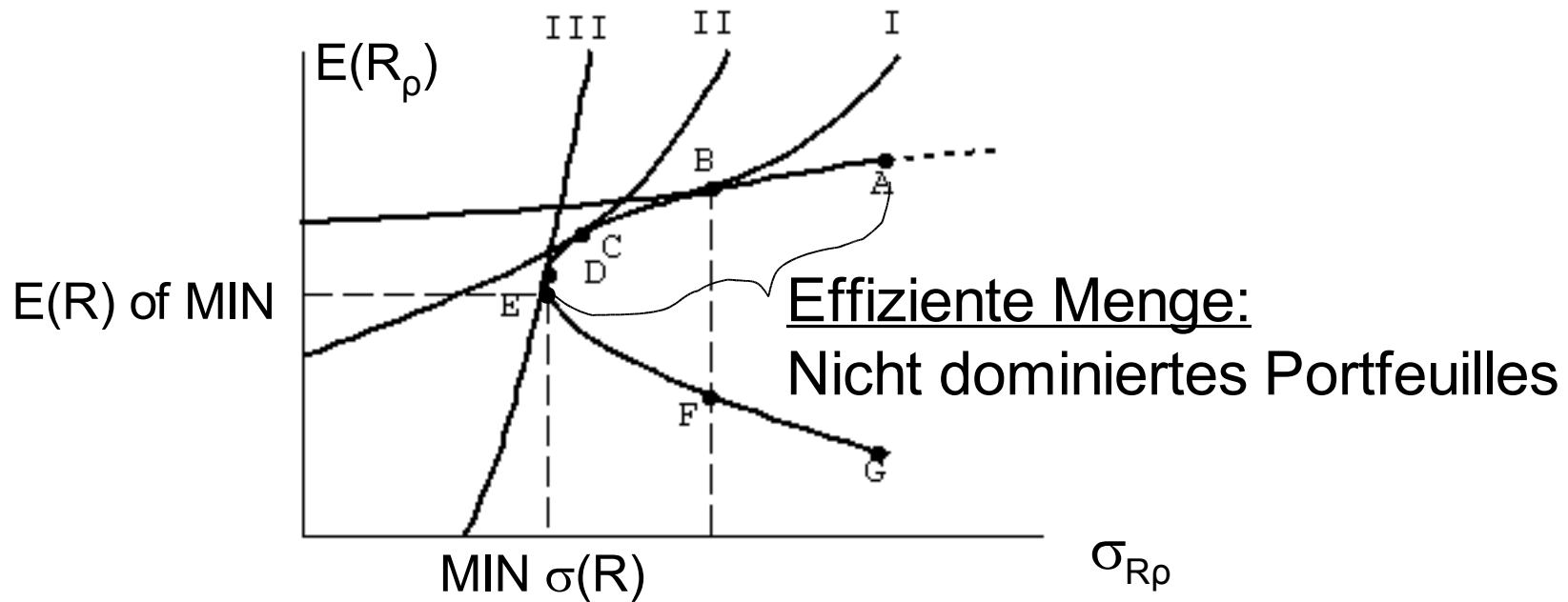
$$\text{MRS} \frac{E(R_p)}{\sigma(R_p)} = \text{MRT} \frac{E(R_p)}{\sigma(R_p)}$$



Optimal portfolio choice for a risk-averse investor and two risky assets.

Problem:

Auch bei homogenen Erwartungen
verschiedene opt. Portfeuillees wegen
individueller Nutzenfunktion

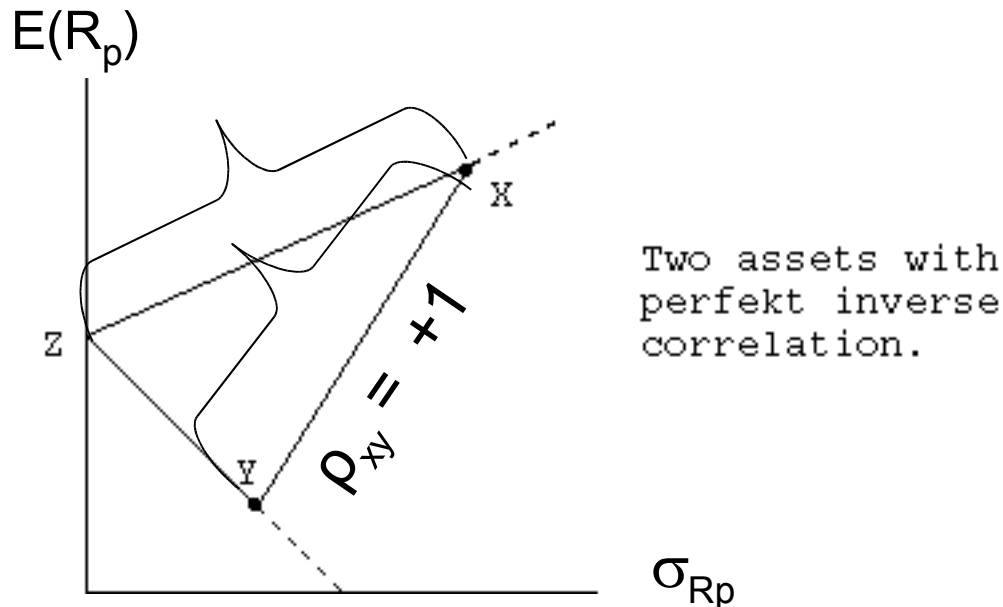


Choices by investors with different indifference curves.

Efficient set. The efficient set is the set of mean-variance choices from the investment opportunity set where for a given variance (or standard deviation) no other investment opportunity offers a higher mean return (previous page).

Sonderfall: $\rho_{xy} = -1$ oder $+1$

Eff. Menge bei $\rho_{xy} = -1$



Problem: Auffinden der μ - σ - Opportunity-Menge

Lösung folgender Programmierprobleme:

PrProb. 1: MIN $\sigma^2 (R_p)$ unter $E(R_p) = \text{Konstant}$

PrProb. 2: MAX $E(R_p)$ unter $\sigma^2 (R_p) = \text{Konstant}$

Da die Zielfunktion z.B. in PrProbl.1 gleich

$$\text{MIN } \{ \sigma^2 (R_p) = (a^2 \sigma_x^2 + (1-a) \sigma_y^2 + 2a(1-a) \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y) \}$$

liegt quadrat. Programmierproblem vor.

(Entscheidungsvariable: Finde a!)

Markowitz (1959) hat das Entscheidungsproblem des Investors erstmals dieser Art definiert und gezeigt, dass der Investornutzen so maximiert wird.

Risikofreier Zinssatz

What if there is a risk free asset available?

Risk free asset = one with a certain return.

Corporations have default (=Bankrott) risk, so we must consider treasury securities.

Suppose we have a 1 year holding period:

- 10 year T-note has interest rate risk
- 90 day T-bill has reinvestment rate risk.

Thus, the only risk-free asset is a treasury security with a maturity that matches the length of the investor's holding period.

(comments: -there should be no coupons (reinvestment risk)
- there is still inflation risk!)

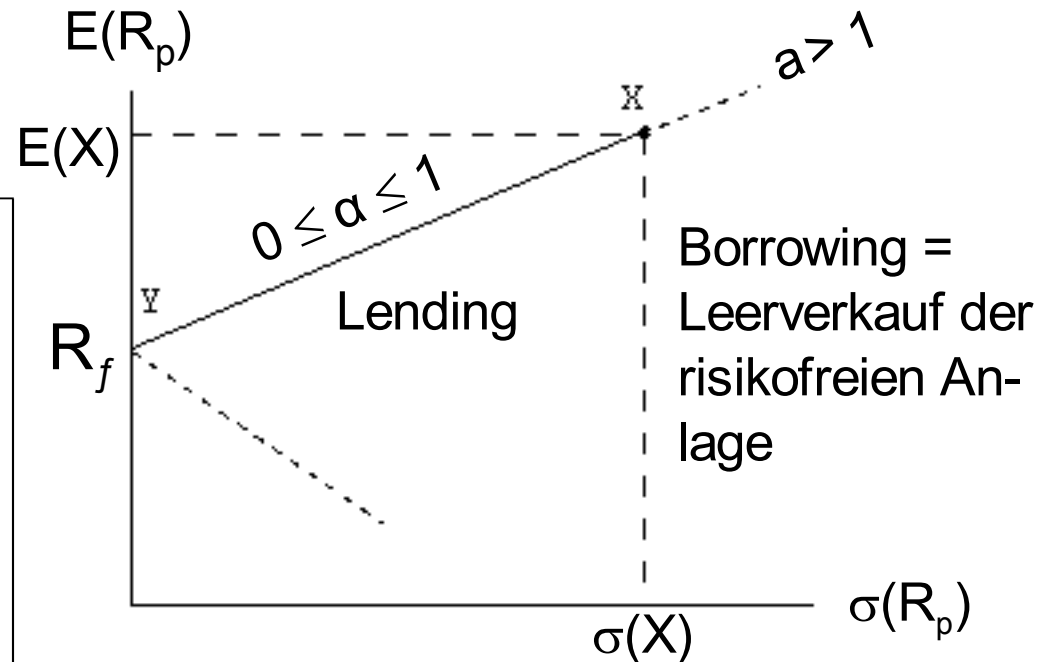
Effiziente Menge mit einer Investition mit Risiko und einer risikofreien Anlage R_f

R_f hat Varianz \emptyset .

Es gilt dann:

$$E(R_p) = a E(X) + (1-a) R_f$$

$$\sigma^2(R_p) = a^2 \sigma_x^2$$



Opportunity set with one risky and one risk-free asset.

Risiko und Ertrag eines Portfeuillees mit mehreren Investitionsmöglichkeiten

Ertrag

$$E(R_p) = (E(R_1) \quad E(R_2)) \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw. } = R'W$$

$$\sigma^2_{R_p} = W' \Sigma W \quad (\Sigma = \text{Kovarianzmatrix})$$

übrigens:

P = Portfolio

$$\text{cov}(R_{p1}, R_{p2}) = W_{p1} \Sigma W_{p2}$$

A = Anlage

oder

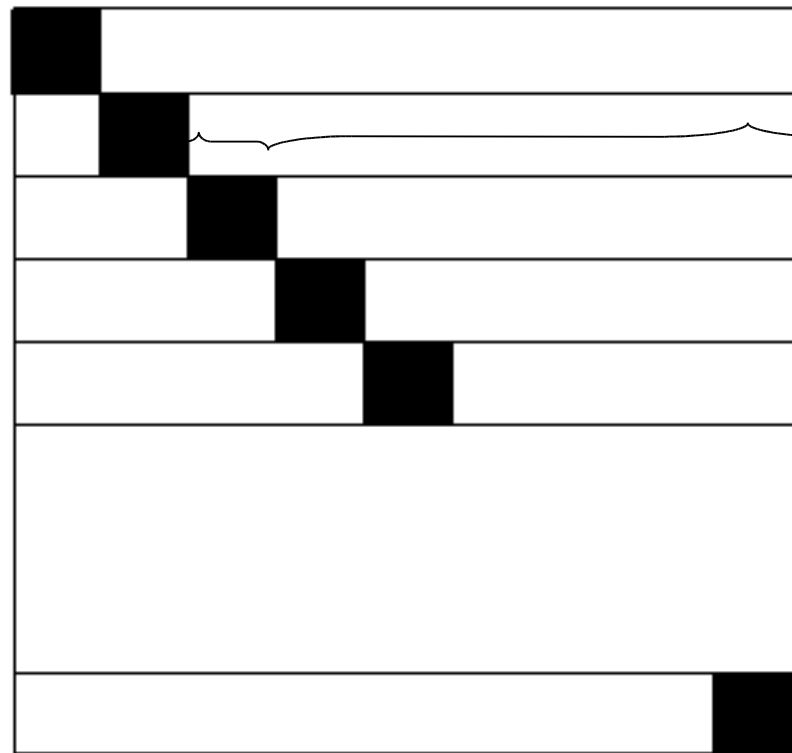
$$\text{cov}(R_{A1}, R_p) = (0.0..1..0) \Sigma W_p$$

Mit großem n spielt Varianz immer weniger eine Rolle!

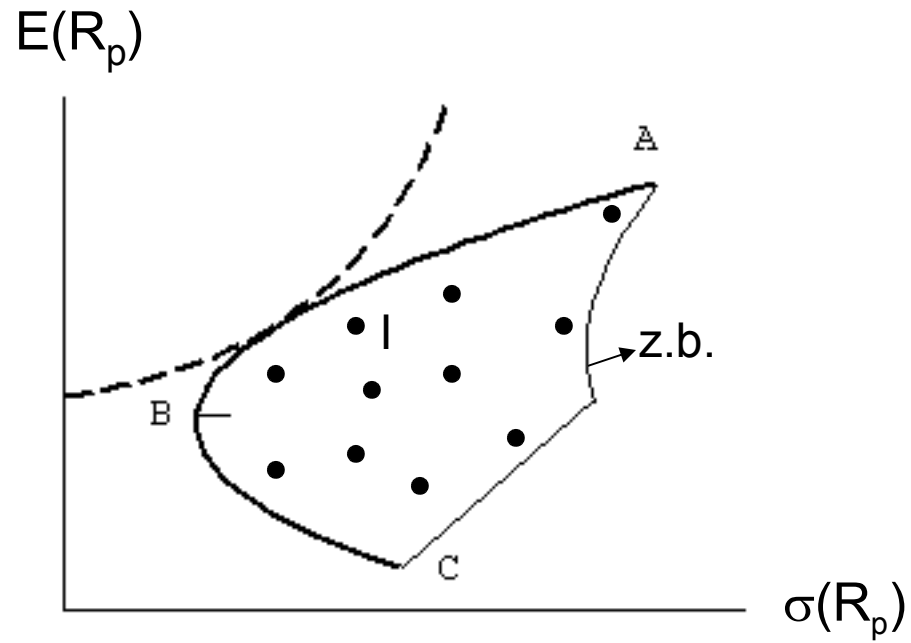
1-Varianz

n-1 Kovarianz

$\Sigma =$

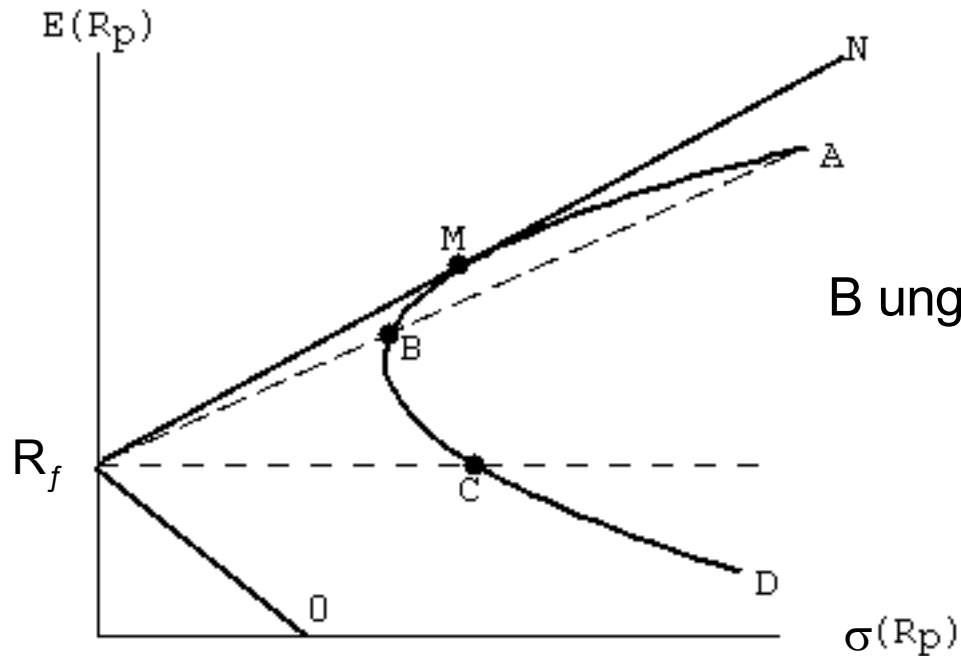


Bsp.: n=500; Kovarianzen = 24.500
Varianzen = 500



The investment opportunity set with many risky assets.

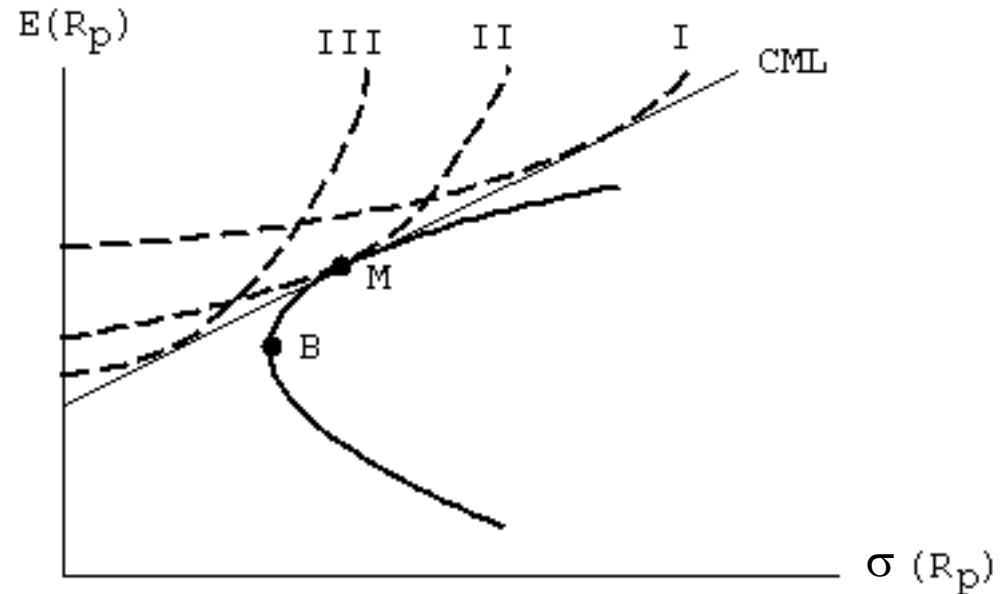
Eine risikofreie und N Anlagen mit Risiko



The efficient set with one risk-free and many risky assets.

Einführung von vollk. Kapitalmarkt : Wirkung

Jeder Investor ist mindestens ebenso gut (II) wenn nicht besser dran.



Dominance of the linear efficient set.

$$\text{MRS}_i = \text{MRS}_j = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma(R_m)} = \text{MRT}$$

Marginal Rate of Substitution = Marginal Rate of Transformation

Two-fund separation. Each investor will have a utility-maximizing portfolio that is a combination of the risk-free asset and a portfolio (or fund) of risky assets that is determined by the line drawn from the risk-free rate of return tangent to the investor's efficient set of risky assets. (Tobin)

Capital market line (CML). If investors have homogeneous beliefs, then they all have the same linear efficient set called the capital market line.

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma(R_m)} \sigma(R_p)$$

Jedes opt. Portfeuille P liegt dort mit dem Ertrag $E(R_p)$

CAPM

(Capital Asset Pricing Model)

CAPM is the intellectual basis for much of the current investment industry.

Markowitz - How should an investor invest? (normative)

CAPM - What will happen if everyone invests this way?

Assumptions:

- 1) Investors are Markowitz efficient diversifiers who delineate and seek the efficient frontier
 - a) they look at expected returns and variances
 - b) they are never satiated
 - c) they are risk averse
 - d) assets are infinitely divisible
 - e) taxes and transaction costs are irrelevant
 - f) there is a risk free rate at which an investor may either borrow or lend



- 2) All investors have the same one-period horizon
- 3) Risk free rate is the same for all investors
- 4) Information is freely and instantly available
- 5) Investors have homogeneous expectations

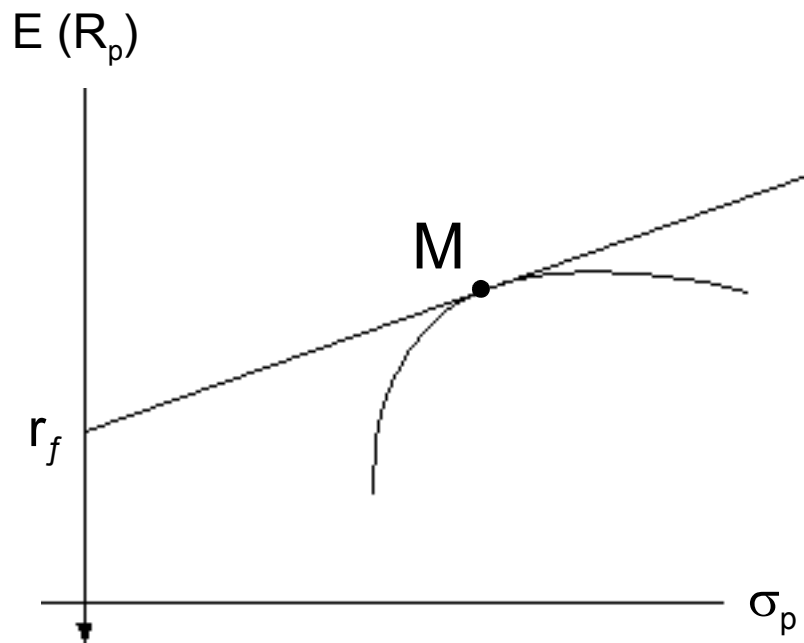
How will assets be priced under these assumptions, assuming the markets are in equilibrium?

Specifically, what is the equilibrium relationship between a security's risk and return?

Implications of CAPM assumptions:

All investors will choose the same tangency portfolio.

This follows from the separation theorem and the homogeneous expectations assumption.



What is M?

- 1) Every security must be represented (if no one is buying asset T, its price will fall, hence its expected returns will rise)
- 2) The number of shares demanded of each security will equal the number of shares outstanding, and the proportion of each asset will be its relative market value.

$w(A)$ = market value of asset A / total market value of all assets

(market value = market clearing price; we assume equilibrium)

If everybody has less than $w(A)$, there will be shares outstanding, \Rightarrow the price will go down

If everybody wants more than $w(A)$, there will be not enough shares to go around, \Rightarrow price will go up.

Thus M is the market portfolio!

Example:

S&P500 Index, A market cap weighted average of the market prices of 500 large stocks. A proxy for the stock segment of the market portfolio. Also used: **NYSE-Index**

Implications for CAPM:

Since each investor holds the market portfolio (in conjunction with borrowing or lending at the risk free rate), investors are concerned with the risk of the market portfolio.

What is the relevant measure of risk of a security?

- **it is not the standard deviation**
- **it is the covariance with the market portfolio**

To see this, compute the variance of the market portfolio

NOTATION:

$$M = w_1 A_1 + w_2 A_2 + \dots + w_N A_N$$

A_i = the i th asset

r_i = the return on the i th asset

$$\sigma_{i,j} = \text{COV}(r_i, r_j)$$

LEMMA:

The covariance of an asset with a weighted sum is the weighted sum of the covariances

$$\text{COV}(r_i, r_M) = \text{COV}(r_i, \sum w_j r_j) = \sum w_j \text{COV}(r_i, r_j)$$

$$\text{oder } \sigma_M^2 = W \Sigma W = W (\Sigma W)$$

$$= \sum w_i \sigma_{iM}$$

Thus the risk of the market portfolio is a weighted sum of the covariances of each asset with the market portfolio.

Normalizing these covariances by the variance of M, we have the definition of Beta.

BETA

$$\beta_i = \sigma_{iM} / \sigma_M^2$$

The relevant measure of the risk of an asset in CAPM

Für $I = M$ gilt: $\beta_M = 1$

CAPITAL ASSET PRICING MODEL:

$$E(r_i) = r_f + (E(r_M) - r_f) \beta_i$$

where

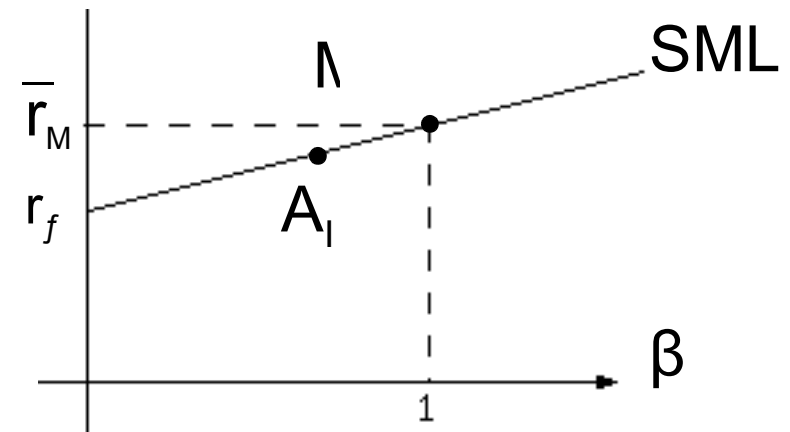
$$\beta_i = \text{COV}(r_i, r_M) / \sigma_{M^2}$$

Thus a security's expected return is positively and linearly related to its Beta (every security)

SML:

(Security Market Line)

Every Security plots on this line (auch jene, die nicht im Portf. des eff. Randes liegen)
z.B. A_1

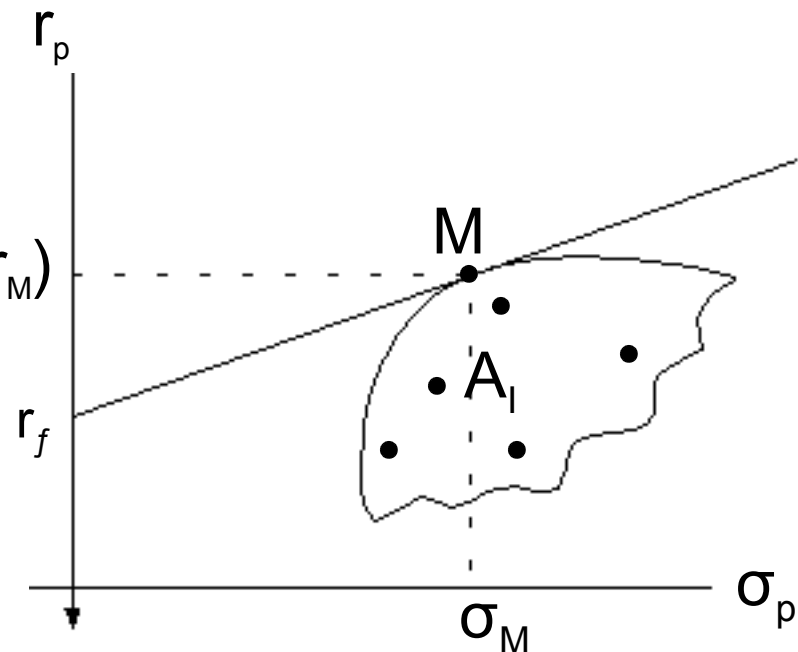


CML:

(Capital Market Line) $E(r_M)$

Slope =

$$\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}$$



Derivation of CAPM:

Consider $P = w_i A_i + (1-w_i) M$

1) Find $E(r_p)$, σ_p

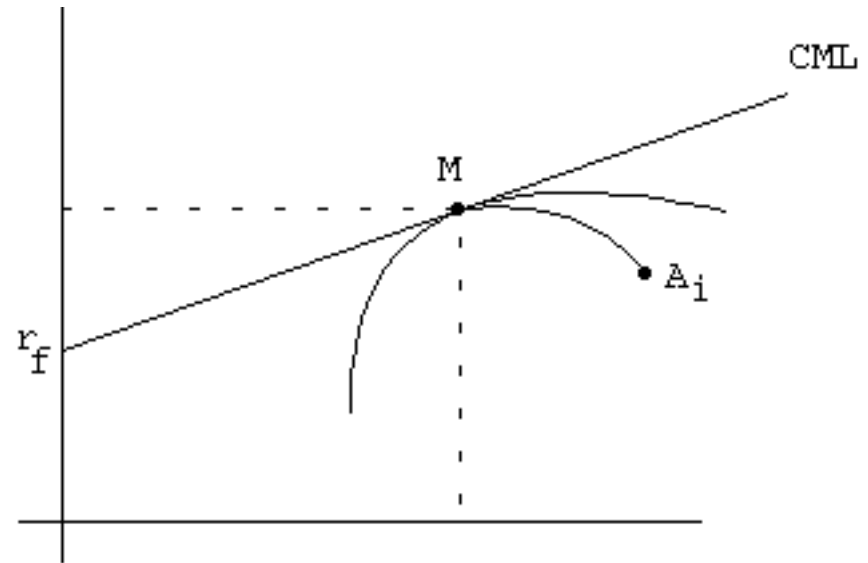
2) Find $\frac{dE(r_p)/dw_i}{d\sigma_p/dw_i}$

3) Evaluate at M ($w_i = 0$) Da I bereits in M ist, ist w_i in Gleichgewicht 0.

4) Set equal to $\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}$, slope of CML

5) Result:

$$E(r_i) = r_f + (E(r_M) - r_f) \frac{\text{COV}(r_i, M)}{\sigma_M^2} = r_f + (E(r_M) - r_f) \beta_i$$



Appendix

Ableitung CAPM

1) Existiert Gleichgewicht \Rightarrow Angebot = Nachfrage
ergo : $w_i = \frac{\text{Marktwert von Anteil I-Projekt}}{\text{Marktwert aller Projekte}}$

2) Für ein Portfeuille P mit

w_i in I und $(1-w_i)$ in M gilt:

$$E(R_p) = w_i E(r_i) + (1-w_i) E(r_M)$$

$$\sigma_{R_p} = (w_i^2 \sigma_i^2 + (1-w_i)^2 \sigma_M^2 + 2w_i (1-w_i) \sigma_{iM})^{1/2}$$

Weiters gilt: $d E(R_p) / da = E(r_i) - E(r_M)$

$$d \sigma_{R_p} / da = 1/2(w_i^2 \sigma_i^2 + (1-w_i)^2 \sigma_M^2 + 2w_i$$

$$(1-w_i) \sigma_{iM})^{1/2} \times (2w_i \sigma_i^2 - 2 \sigma_M^2 - 2w_i$$

Da das Marktportfeuille M bereits I enthält, folgt $w_I = 0$ in Gleichgewicht; daher:

$$\left. \frac{d E(r_p) / da}{d \sigma_{r_p} / da} \right|_{w_I=0} = \left. \frac{d E(r_p)}{d \sigma_{r_p}} \right|_{w_I=0} = \frac{E(r_I) - E(r_M)}{\sigma_{IM} - \sigma_M^2}$$

$$\sigma_M$$

Da für die CML das Portfeuille auch in Gleichgewicht ist und Steigung

$$\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}$$

aufweist, folgt aus:

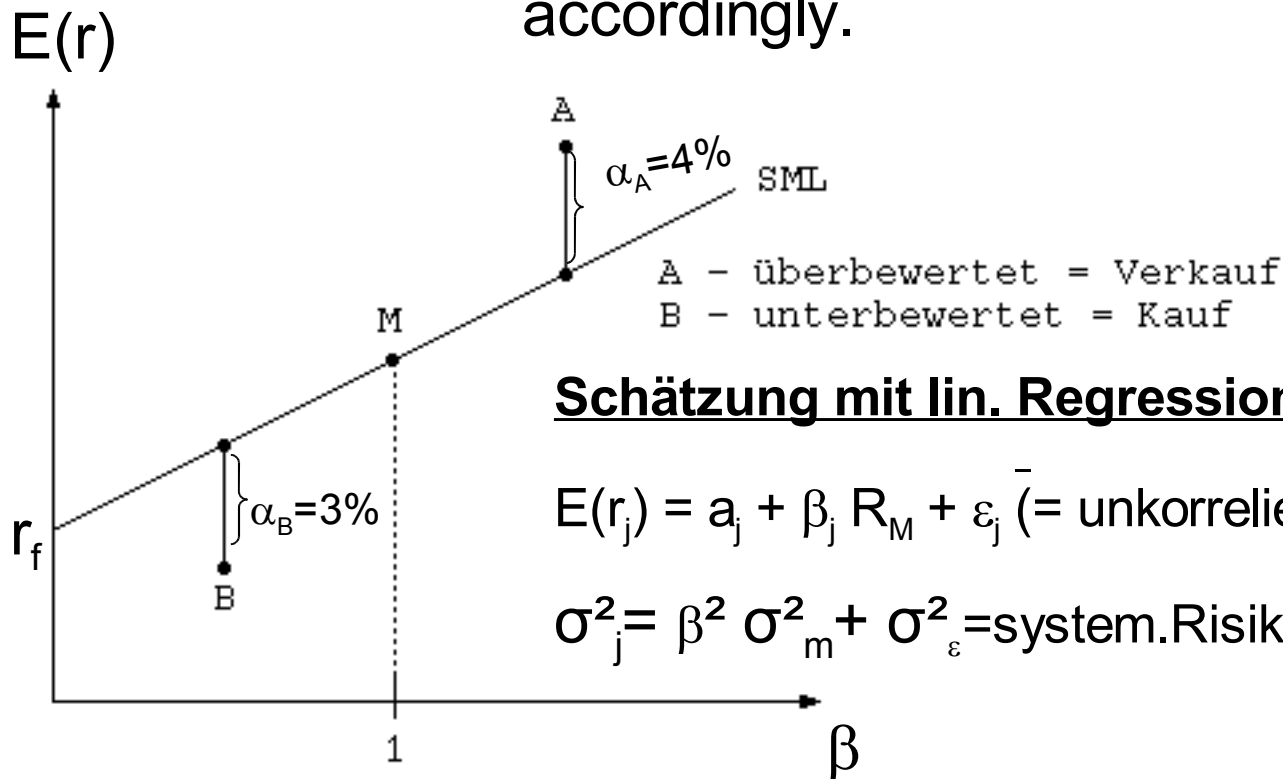
$$\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} = \frac{E(r_I) - E(r_M)}{(\sigma_{IM} - \sigma_M^2) / \sigma_M} \text{ oder}$$

CAPM applies to both active and passive portfolio management

passive: buy S&P500, and treasuries

active: (=tactical asset allocation = market timing)

forecast asset prices, if they are underpriced or overpriced buy or sell accordingly.



Schätzung mit lin. Regression: β_j

$$E(r_j) = a_j + \beta_j R_M + \varepsilon_j \quad (= \text{unkorrelierte ZV})$$

$$\sigma_j^2 = \beta^2 \sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2 = \text{system.Risiko} + \text{unsyst.Risiko}$$

Table 7.2 Rates of Return and Betas for Selected Companies, 1945-1970

	<i>Average Annual Return</i>	<i>Standard Deviation</i>	<i>Beta</i>
City Investing Co.	17.4 %	11,09 %	1.67
Radio Corporation of America	11.4	8.30	1.35
Chrysler Corporation	7.0	7.73	1.21
Continental Steel Co.	11.9	7.50	1.12
100-stock portfolio	10.9	4.45	1.11
<u>NYSE index</u>	8.3	3.73	<u>1.00</u>
Swift and Co.	5.7	5.89	.81
Bayside Cigar	5.4	7.26	.71
American Snuff	6.5	4.77	.54
Homestake Mining Co.	4.0	6.55	.24

From F.Modigliani and G.Pogue, „An Introduction to Risk and Return“, reprinted from *Financial Analysts Journal*, March-April 1974,71.

Man kann zeigen:

CAPM:

$$\beta_M = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ \dots \\ w_N \end{pmatrix}$$

wenn
$$E(r_M) = \sum_{i=1}^N w_i E(r_i)$$

Summary: CAPM is the grand-daddy of asset pricing models.

- there is not much evidence to substantiate its validity
- there is debate as to whether it is even testable, what is the market portfolio? S&P500 used as proxy, to estimate betas.
- it has generated much useful empirical information

CAPM has many children: Extensions, alternative models.

- relax assumption that lending rate = Borrowing Rate
- heterogeneous expectations; each investor has unique efficient set and tangency portfolio
- investors also concerned with liquidity (not just risk and return)

Weiterentwicklung:

Arbitrage Pricing Theory = APT (Ross 1976)

statt

1-Faktoren Modell (CAPM)

Faktor = r_M = Ertrag des Marktportfolio)

n-Faktoren Modell

ARBITRAGE

A METHOD OF VALUATION

The law of one price: A security can have only one price

Arbitrage = riskless profit due to price discrepancies.

The Hypothesis of no-arbitrage possibilities allows the valuation of derivative securities.

Example: Futures contract on a security that pays no dividends

How much is it worth?

F^* = Fair Price

F_0 = Futures price now

S_0 = Stock price now

F_T = Futures price at expiration

S_T = Stock price at expiration

r = riskless rate

$$F^* = S_0 (1 + r)$$

The answer has nothing to do with expectations!

Futurespreis und Periode muß gleich $F^* = S_0 (1+r)$ sein, sonst risikoloser Gewinn!

Reason: Suppose $F_0 > S_0 (1+r)$

Sell the futures; must hedge

borrow S_0 dollars and buy the stock

At Expiration, liquidate:

Futures position: $F_0 - F_T$

Stock Position: $S_T - S_0 (1+r)$

But $F_T = S_T$

$$(F_0 - F_T) + (S_T - S_0 (1+r)) = F_0 - S_0 (1+r) > 0$$

Riskless profit! Bet the farm!

Result: Heavy futures selling will force F_0 down, until the ARB

Conversely: Suppose $F_0 < S_0 (1+r)$

Buy the futures; must hedge

sell the stock, invest the S_0 dollars

At Expiration, liquidate:

Futures position: $F_T - F_0$

Stock Position: $S_0 (1+r) - S_T$

But $F_T = S_T$

$$(F_T - F_0) + (S_0 (1+r) - S_T) = S_0 (1+r) - F_0 > 0$$

Riskless profit! Bet the farm!

Result: Heavy stock selling will force F_0 down, until the ARB disappears.

Key ingredients of this analysis:

Arbitrage opportunities cannot persist - Arbitrageurs are like policemen who enforce the law of one price

ASSUMPTIONS:

Short selling no problem

No Transaction costs

Borrowing rate = Lending rate

Also the above example was quite simplified:

1) The industry uses continuous compounding models:

$$F^* = S_0 e^{rt}$$

2) The instrument might throw off known amount of cash

$$F^* = (S_0 - I) e^{rt} \quad I = \text{present value of cash flows}$$

3) Instrument might generate dividends $F^* = S_0 \exp[(r-d)T]$

OPTIONEN (Aktien)

(1973 mit CBOE eingeführt)

Kaufoption (CALL): Vertrag, der erlaubt, eine Aktie der Gesellschaft zu einem festen Preis (Ausübungspreis) zu einem gewissen Zeitpunkt (oder innerhalb einer gewissen Frist) zu kaufen.

Kaufoptionen können

1) gekauft oder

2) verkauft werden.

Verkaufsoptionen (PUT): Erlauben Inhaber des Vertrages zu verkaufen zu späterem Zeitpunkt (oder innerhalb einer Frist) zu festem Preis.

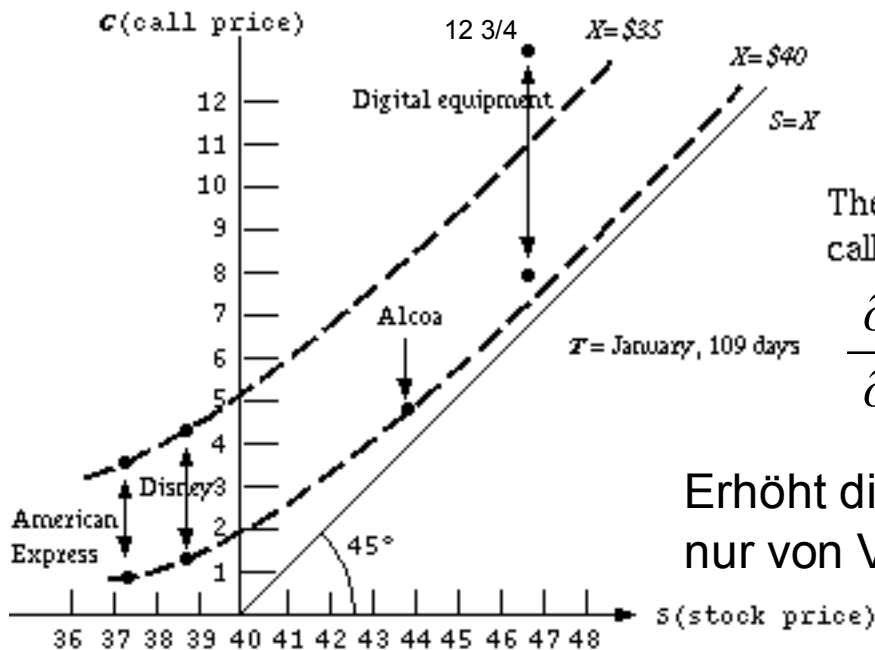
Sie können:

- 1) gekauft oder
- 2) verkauft werden

Auszug: Chicago Board

Listed Options Quotations (4. Oktober 1977)

Option	Price	- Oct.-		- Jan.-		- Apr.-		N.Y. Close
		Vol.	Last	Vol.	Last	Vol.	Last	
Alcoa	40	b	b	13	4 ¾	a	a	43 ¾
Am Exp	40	166	1-16	6	¾	18	1 ½	37 1/8
Dig. Eq	40	231	6 7/8	32	8	b	b	46 ¾

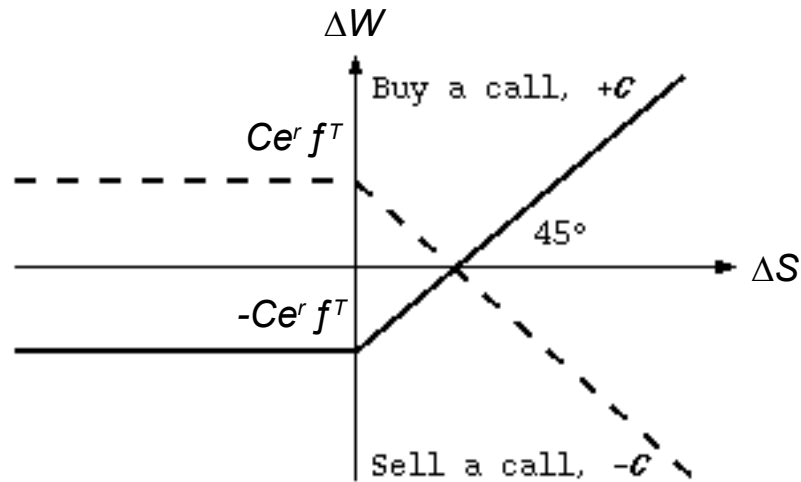


$$C = f(S, X, \sigma^2, T, r_f)$$

The relationship between the call price and the stock price

$$\frac{\partial C}{\partial S} > 0, \quad \frac{\partial C}{\partial X} < 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} > 0, \quad \frac{\partial C}{\partial T} > 0$$

Erhöht die Wahrscheinlichk. $W(S > X)$; Ertrag nur von Verteilungende.



Payoffs von CALL-Option

ΔW = Änderungen von Wohlstand

ΔS = Änderungen von S

Europäische Kaufoption in einer „alternativen“ Welt.

$S = \$ 20.00$ = the stock price,

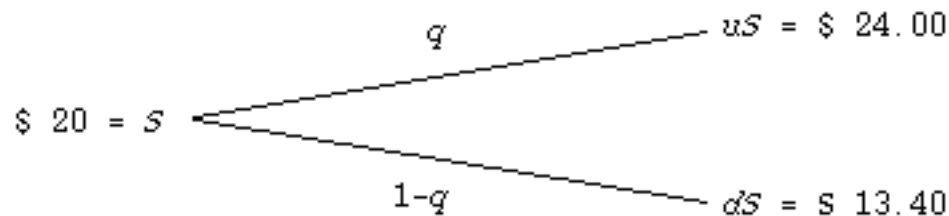
$q = .5$ = the probability the stock price will move upward,

$1+r_f = 1.1$ = one plus the risk-free rate of interest,

$u = 1.2$ = the multiplicative upward movement in the stock price

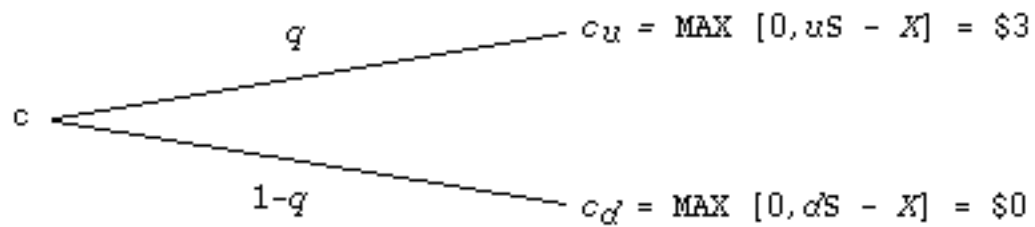
$$(u > 1 + r_f > 1),$$

$d = .67$ = the multiplicative downward movement in the stock price
($d < 1 < 1 + r_f$)



A one-period binomial
generating process.

Wert der Option c?



$$uS = 24$$

$$dS = 13,40$$

$$X = 21.--$$

Payoffs for a one-period call option.

Konstruktion eines **risikofreien sicheren Endvermögens**:

Ausgangspunkt:

Wir

kaufen 1 Aktie um S und

verkaufen m Kaufoptionen um $c m$.

Nach einer Periode soll gelten:

$$uS - mc_u = dS - mc_d$$

d.h. es muß gelten:

$$m = \frac{S(u - d)}{c_u - c_d}$$

in unserem Beispiel gilt:

$$m = \frac{20 (1,2 - 0,67)}{3 - 0} = 3,53$$

Umweltzustand	Portf.	Vermögen
Steigen	$uS - mc_u$	= 13,40
Fallen	$dS - mc_d$	= 13,40

Da das sichere Endvermögen risikolos war, muß gelten:

$$(1+r_f)(S-mc) = uS - mc_u \quad \text{oder:}$$

$$c = \frac{S((1+r_f)-u)+mc_u}{m(1+r_f)}$$

Setzen wir $m = \frac{S(u-d)}{(c_u-c_d)}$ ein, so erhält man:

$$c = \frac{1}{(1+r_f)} \left(c_u \left(\frac{(1+r_f)-d}{u-d} \right) + c_d \frac{u-(1+r_f)}{u-d} \right)$$

für $p = \frac{(1+r_f)-d}{u-d}$ und $1-p = \frac{u-(1+r_f)}{u-d}$ erhält man:

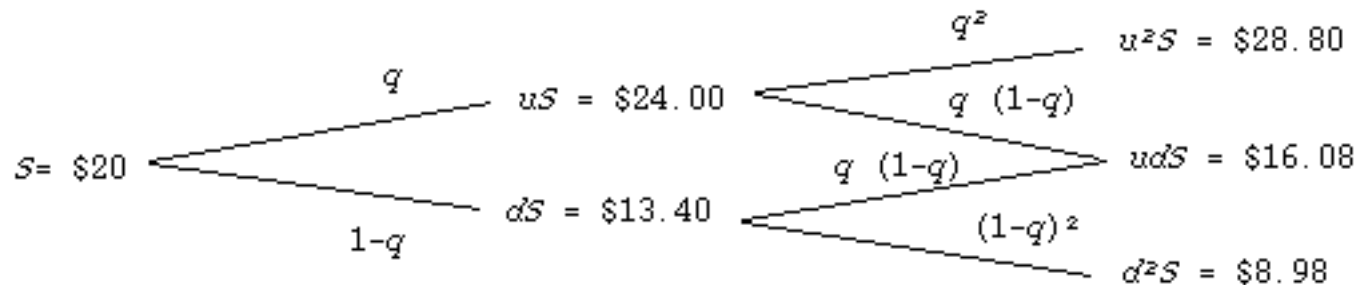
$$C = (pc_u + (1-p)c_d) / (1+r_f)$$

Bsp: $(r_f=0,1)$ $P = \frac{1.1-0.67}{1.2-0.67} = 0.8113$ also:

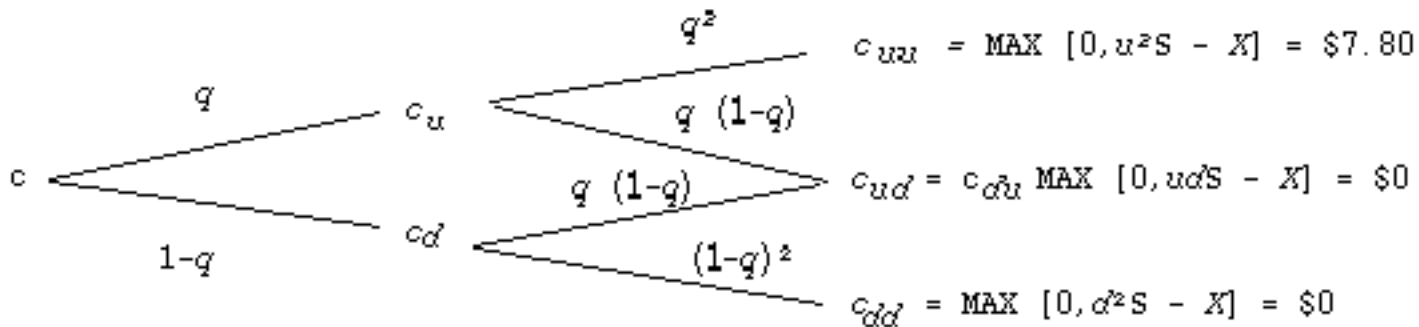
$$c = (0.8113 \times 3 + 0.1887 \times 0) / 1.1 = 2.21..$$

Es gilt: $0 < p < 1$ und

p wird als Hedging-Wahrscheinlichkeit bezeichnet!



Stock prices with a two-period binomial process: $S = \$20$, $u = 1.2$, $d = .67$.



Two-period binomial call payoffs: $S = \$20$, $u = 1.2$, $d = .67$, $X = \$21$.

Wir behandeln dies wie eine Stichprobe aus alternativ verteilter Gesamtheit mit p ; es gilt für T Perioden für die Option:

$$C_{u^n d^{T-n}} = \max(0, u^n d^{T-n} S - X)$$

Also:

$$C = \left(\sum_{n=0}^T \frac{T!}{(T-n)! n!} p^n (1-p)^{T-n} \max(0, u^n d^{T-n} S - X) \right) \frac{1}{(1+r_f)^T}$$

Durch Umformung kann man schreiben:

$$c = S B(n \geq a / T, p') - X(1+r_f)^{-T} B(n \geq a / Tp) \quad \text{mit}$$

$$B(n \geq a / T, p') = \sum_{n=a}^T \frac{T!}{(T-n)! n!} (p')^n \cdot (1-p')^{T-n}$$

$$\text{und } p = \frac{(1+r_f) \cdot d}{u-d} \quad \text{sowie } p' = \left(\frac{u}{(1+r_f)} \right)^p$$

$$\text{und } a = \lceil \ln(X/Sd^T) / \ln(u/d) \rceil$$

Cox, Ross und Rubinstein (1979)

Es gilt mit $n \rightarrow \infty$

$B(n \geq a / T, p')$ $\rightarrow N(d_1)$ und

$B(n \geq a / T, p)$ $\rightarrow N(d_2)$

d.h. mit $n \rightarrow \infty$ gilt die Black-Scholes-Formel (1973):

$$c = S N(d_1) - X e^{-r_f T} N(d_2)$$

$$\text{mit } d_1 = \frac{\ln(S/X) + r_f T}{\sigma \sqrt{T}} + \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Gilt nicht für amerikanische Optionen!

Gilt für:

- Optionen auf Anleihen, Indexen
- Optionen auf Futures
- Optionen auf Zinssätze und Wechselkurse
- Optionen auf SWAPS

usw.

Optionen, immer dann wenn Flexibilität vorhanden \Rightarrow
REAL OPTIONS!

Aktien: Optionen hängen von einer zugrundeliegenden
Zufallsvariablen ab: Vermögenswert = Aktie

Wir verwenden kontinuierlichen Zinseszins:

$$B = S_n = P_0 (1+r)^n \quad \text{jährlich}$$

$$S_n = P_0 (1+r/2)^{2n} \quad \text{halbjährlich}$$

$$S_n = P_0 (1+r/m)^{mn} \quad \text{m-Verzinsungs-zeitpunkte pro Perioden}$$

wegen $S_n = P_0 ((1+r/m)^{r/m})^{rt}$ für $m' = m/r$

erhält man $S_n = P_0 ((1+r/m')^{m'})^{rt}$

Geht m nach ∞ , so geht m' nach ∞ und man erhält wegen:

$$\lim_{m' \rightarrow \infty} 1 + \left(\frac{1}{m'} \right)^{m'} = e$$

$$S_n = P_0 e^{rt} \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

$$\text{bzw.: } P_0 = S_n e^{-rt}$$

Bewertung des PUT im allgemein komplizierten

Einfacher mit:

PUT-CALL-Parity (nur europ. PUT (d.h. ohne Dividende und auszuüben nur zu Periodenende))

Portfeuille:

1 Aktie - KAUF

1 Put-Option - KAUF

1 CALL-Option - VERKAUF

} X= Ausübungspreis
T= Laufzeit

Umweltzu- stand	Vermögen			Σ
	Aktie	PUT	CALL	
$S < X$	S	X-S	0	X
$S \geq X$	S	0	-(S-X)	X

Sicheres Endvermögen: X daher diskontierbar mit r_f

Diskrete Abzinsung:

$$S_0 + P_0 - C_0 = \frac{X}{1+r_f}$$

$$\text{und daraus } (C_0 - P_0) = \frac{(1+r_f) S_0 - X}{1+r_f} = \frac{(1+r_f) S_0}{1+r_f} - \frac{X}{1+r_f}$$

(r_f = Zins für Periode)

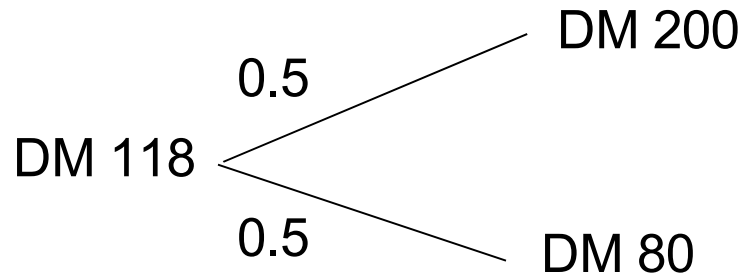
Für $S_0 = X$ gilt: $C_0 - P_0 = r_f S_0 / (1 + r_f) > 0$

Stetig: $C_0 - P_0 = S_0 - Xe^{-rft}$

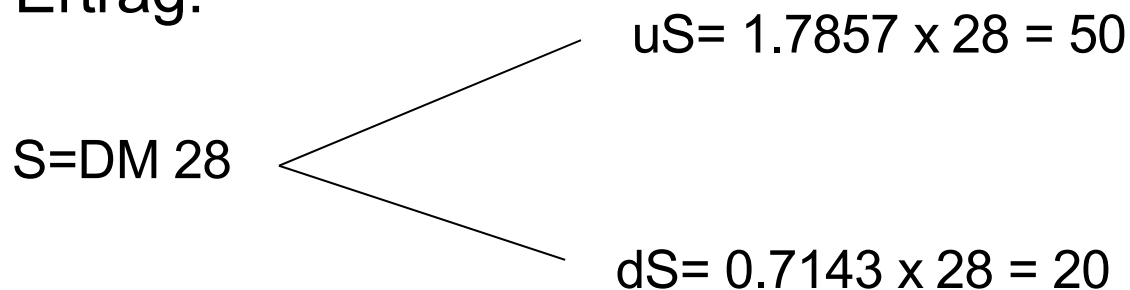
Strategische Aspekte und IT-Einsatz

Barwertanalyse hat u.a. den Mangel der Nichtbeachtung strategischer Aspekte:

Beispiel: IT-Investition (2 Umweltzustände nach 1 Jahr)



Projekt nicht mit Geschäftsrisiko des Unternehmens selbst hoch korreliert, daher vergleichbares „Gut“ zu suchen, mit demselben Ertrag:

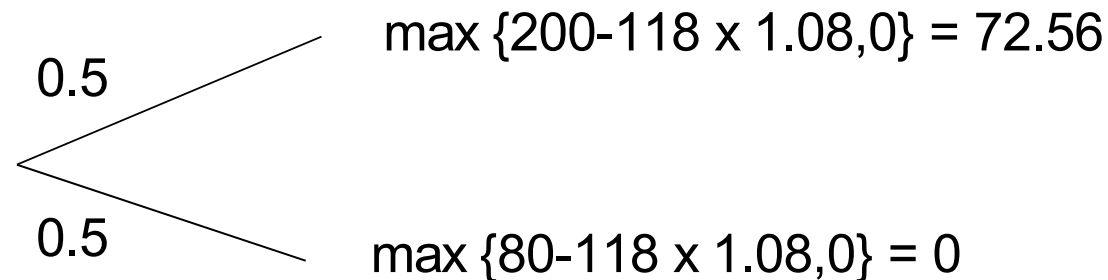
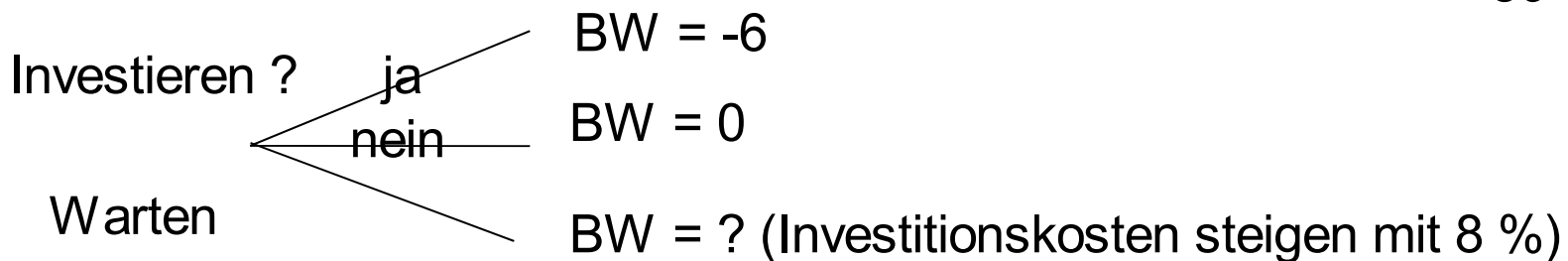
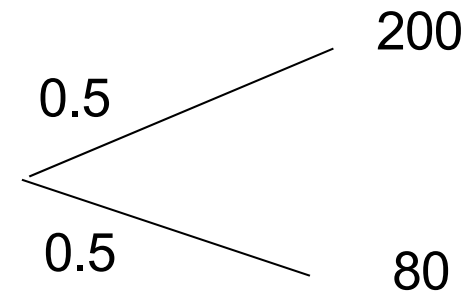


Lineares Vielfaches von Projekt, daher gilt für Zins

$$28 = \frac{0.5 \times 50 + 0.5 \times 20}{1 + r} = \frac{35}{1 + r} \quad \text{oder } r = 25 \%$$

$$\text{Barwert} = \frac{0.5 \times 200 + 0.5 \times 80}{1.25} - 118 = -6.-$$

Alternative: 1 Periode warten



Suche replizierendes Portfolio am Markt!

Wir kombinieren unser korreliertes Gut S mit dem risikolosen Entleihen von B DM (m = Anzahl der Anteile von S, B = Anzahl der risikolosen Anteile): Wir erhalten das Gleichungssystem

$$m \times (uS) - (1 + r_f) B = 72.56$$

$$m \times (dS) - (1 + r_f) B = 0$$

und für $uS = 50$ und $dS = 20$ mit $r_f = 0.08$:

$$*B = 44.79 \text{ und } m = 2.42 \text{ Aktien}*$$

Da dieses Portfolio den gleichen Ertrag hat, wissen wir dessen Wert:

$$mS - B = 2.42 \times 28 - 44.79 = 22.97$$

Der Wert der Option auf Verzögerung ist also

$$22.97 - \text{Projektbarwert } (-6) = 28.97$$

Andere reale Optionen:

- Option auf Projektabbruch (mit Teilerlösen) (Put-Option)
- Option auf Projektbeginn - oder -entwicklungsverzögerung
- Option auf Projekterweiterung
- Option auf Projektreduktion u.a.m.

Viele hiervon relevant für IS- und IT-Investitionen bisher praktisch nicht explizit berücksichtigt.

(Vgl. A. Dixit, R. Pindyck, Investment under uncertainty, Proctor Univ. Press, 1994 und insbesondere zum Zusammenhang von Entscheidungsbaumanalyse und reale Optionen: Nau, R.F. und Smith, J.E., Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Analysis, Management Science, VI. 41, No. 5, pp. 795-816 (1995)) Copeland, T., Real Options, Texere, 2001.